

Глава 1. Теория числовых рядов.

§1. Критерий сходимости ч.р.

$$\forall \{u_k\}_{k=1}^{\infty}, u_k \in \mathbb{R}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1) \quad - \text{числовой ряд}$$

u_k - общий член ряда (1)

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad - \text{n-ая частичная сумма ряда (1)}$$

Опр. Числ. ряд (1) наз. сходящимся, если посыл. $\{S_n\}$ сходящ. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$
 S - сумма ряда (1)

$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ряд (1) наз. расходящимся.

Если (1) сходящ., тогда $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = r_n$ - n-ый остаток ряда.

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \Rightarrow S - S_n = r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ т.е. } r_n = o(1), n \rightarrow \infty.$$

Примеры 1. $\div q^{k-1} \quad 1, q, q^2, \dots, q^{k-1}, \dots \quad (q \neq 0)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1$$

$$|q| < 1 \Rightarrow q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} = S, \text{ ряд сходящ.}$$

$$|q| = 1 \quad q = 1 \quad S_n = \sum_{k=1}^n 1 = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$q = -1, \quad S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \in \{0, 1\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ряд} \\ \text{расх.} \end{array} \right\}$$

$$|q| > 1 \Rightarrow |q|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \text{ ряд расходящ.}$$

2. e^x , формула $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^x = \underbrace{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}_{S_n} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \quad \theta \in (0, 1)$$

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^n}{n!} e^{\theta x} \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|} \Rightarrow |e^x - S_n| = |R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \quad (\text{формула Стирлинга})$$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x, \text{ т.е. ряд сходящ. и } S = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \quad S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ т.е. ряд сходящ. и } S = 1.$$

$$\{S_n\} - \text{сх} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}: |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$$

Теорема 1 (Кр. Коши сх-ты ч. рядов)

Для того чтобы ч. ряд (1) сх-ся $\Leftrightarrow$, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N$

$$\forall p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \quad (2)$$

Следствие Для того чтобы ряд (1) сх-ся необходимо, чтобы $u_k = o(1), k \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \text{из (2): } p=1 \quad |u_{n+1}| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Пример 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2k^2+3k} - \text{ряд расх-ся}$

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \text{гармонический ряд расходится}$

$$\text{Д-во, что } \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N, \exists p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \geq \varepsilon$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} = \frac{p}{n} \cdot \frac{n}{n+p} = \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{p}{n}} \approx \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{p}{2n}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{4}: \forall N \exists n > N \exists p = n: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{4} \Rightarrow \text{ряд расх-ся}$$

Замечание 1. Добавление или отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на его сх-сть или расх-ть (т.е. $n \rightarrow \infty$ не влияет)

2. Для $\forall c \neq 0$ ряды $\sum_{k=1}^{\infty} (c u_k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сх-ся или расх-ся одновременно.

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geq 0 \quad (1)$$

Теорема 2. Для того чтобы ряд (1) с неогр. членами сх-ся $\Leftrightarrow$ чтобы посл. $\{S_n\}$ его чл. сумм была ограничена.

$$\text{Д-во: } (\Rightarrow) \text{ I (1) сх-ся } \Rightarrow \{S_n\} - \text{сх-ся} \Rightarrow \{S_n\} - \text{огр.}$$

$$(\Leftarrow) \text{ I } \{S_n\} \text{ огр. Т.к. } p_k \geq 0, \text{ то } \{S_n\} \uparrow \text{ и убыв. } \Rightarrow \{S_n\} \text{ сх-ся}$$

1°. Три признака сравнения

$$\Delta \text{ ряд (1) и ряд } \sum_{k=1}^{\infty} p'_k, p'_k \geq 0 \quad (2)$$

Теорема 3 (1-ый признак сравнения)

$$\text{Пусть, начиная с некоторого } n_0: p_k \leq p'_k, k \geq n_0 \quad (3)$$

Тогда из сх-ты ряда (2) $\Rightarrow$ сх-ть ряда (1)
из расх-ты ряда (1) $\Rightarrow$ расх-ть ряда (2)

Д-во. Если (1) расх, то (2) расх, т.к. если бы (2) ссх, то по 1-ой части леммы (1) тоже ссх-ал.
 [(2) ссх-ал. Контр. общности, считаем что (3) верно $\forall k: p_k \leq p'_k$ ($\Rightarrow$ из замет. 1) $k=1, 2, \dots$
 S_n, S'_n - част. суммы рядов (1), (2) соответственно $\Rightarrow S_n \leq S'_n \forall n$.
 Ряд (2) ссх-ал $\xrightarrow{T.2} \{S'_n\}$ - ссх $\Rightarrow \{S_n\}$ ссх $\xrightarrow{T.2} (1)$ ссх-ал. $\blacksquare$

Примеры. 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \alpha < 1$ обобщенный гармон. ряд.

$$\frac{1}{k^{\alpha}} > 0 \text{ сравн. с } \frac{1}{k}$$

$$k^{\alpha} < k \Rightarrow \frac{1}{k^{\alpha}} > \frac{1}{k} \quad p_k = \frac{1}{k}, p'_k = \frac{1}{k^{\alpha}}$$

$$\sum \frac{1}{k} - \text{расх} \xrightarrow{T.3} \sum \frac{1}{k^{\alpha}} - \text{расх} \quad \forall \alpha < 1.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad k^2 = k \cdot k > k(k-1) \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} \quad k \geq 2$$

$$\sum \frac{1}{k(k-1)} - \text{сх-ал} \xrightarrow{T.3} \sum \frac{1}{k^2} - \text{сх-ал}.$$

Лемма 4 (2-ой признак сравнения)

$$\Delta (1), (2), [p_k > 0, k \geq k_0 > 1]$$

$$[\exists \text{ конечный и отличный от нуля } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p'_k}{p_k} = L, L \neq 0, L < \infty]$$

Тогда оба ряда (1), (2) ссх-ал или расх одновременно.

($L=0$, то упр. как в Т.3).

$$\text{Д-во. } \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p'_k}{p_k} = L > 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > k_0 : L - \varepsilon < \frac{p'_k}{p_k} < L + \varepsilon, \forall k \geq N$$

$$[\varepsilon : L - \varepsilon > 0 \quad \varepsilon < L \Rightarrow (L - \varepsilon)p_k < p'_k < (L + \varepsilon)p_k \text{ по Т.3}] \quad \blacksquare$$

Лекция №2
6.09.10

$$\text{Пример } \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$k \rightarrow \infty \quad \frac{1}{k} \rightarrow 0 \quad \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \rightarrow 0 \text{ (необх. упр.)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{1/k} = 1, \quad \ln(1 + \frac{1}{k}) > 0 \xrightarrow{T.4} \text{расх-ал} \quad \left(\begin{array}{l} p'_k = \ln(1 + \frac{1}{k}) \\ p_k = \frac{1}{k}, L = 1 \end{array} \right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$$

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) +$$

$$+ \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{расх-ал} \xrightarrow{T.4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ расх}$$

Доказ-ем, что $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + C + d_n$, $d_n \rightarrow 0$, $C = 0,577... - \text{const}$ Зингер

$$\Delta \frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k}) = \frac{1}{k} - (\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + O(\frac{1}{k^3})) = \frac{1}{2k^2} + O(\frac{1}{k^3}) = O(\frac{1}{k^2}) \geq 0$$

$\leq C \frac{1}{k^2}$

$$\ln(1+x) < x, x \in (0,1)$$

$$\text{Т.к. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ с.с.} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k})) \text{ с.с.} = S = C$$

$$\sum_{k=1}^n (\frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k})) = C + \delta_n, \delta_n = o(1), n \rightarrow \infty \Rightarrow H_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k}) + C + \delta_n =$$

$$= \ln(n+1) + C + \delta_n = \ln n(1 + \frac{1}{n}) + C + \delta_n = \ln n + \underbrace{\ln(1 + \frac{1}{n})}_{\rightarrow 0} + C + \delta_n = \ln n + C + d_n$$

$d_n = o(1), n \rightarrow \infty$

Теорема 5 (3^{ий} признак сравнения)

Δ ряды (1), (2). Пусть $p_k, p'_k > 0, k \geq k_0$

$$\exists \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}, \forall k \geq k_0$$

Тогда с.с. (2) $\Rightarrow$ с.с. (1)
расх. (1) $\Rightarrow$ расх. (2)

До-во: Из замеч. 1 $\Rightarrow$ не с.с. б.с.с. $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \quad \forall k = 1, 2, \dots$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_2}{p_1} \leq \frac{p'_2}{p'_1} \\ \frac{p_3}{p_2} \leq \frac{p'_3}{p'_2} \\ \dots \\ \frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{p'_n}{p'_{n-1}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{p_n}{p_1} \leq \frac{p'_n}{p'_1} \mid \cdot p_1 \Rightarrow p_n \leq \frac{p_1}{p'_1} p'_n \xrightarrow{\text{Т.З}} \text{Т.5}$$

2^о Признаки Даламбера и Коши.

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geq 0 \quad (1) \quad \text{сравнивается с } \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}, q \in (0,1) \text{ с.с.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 \text{ расх.с.}$$

Теорема 6 (признак Коши)

Δ ряд (1)

$$\text{I } \exists \sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geq 1), \forall k \geq k_0 \geq 1$$

Тогда ряд (1) с.с. (расх.с.)

$$\text{II } \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Тогда, если $L < 1$, то (1) с.с.
 $L > 1$, то (1) расх.с.

Д-во: I. $\sqrt[k]{p_k} \geq 1, k \geq k_0$ p_k

$p_k \geq 1, \text{ т.е. } p_k \neq 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow \text{ряд расх-ся}$

] $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$ p_k

$p_k \leq q^k, q \in (0, 1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ - сх-ся (пр. 1 §1)

$p_k' = q^k \xrightarrow{\text{т.3}} \text{ряд (1) сх-ся}$

II. $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k > N \quad L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$

] $L < 1$. Выберем $\varepsilon: L + \varepsilon < 1, \text{ т.е. } 0 < \varepsilon < 1 - L$

$q = L + \varepsilon, \sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \xrightarrow{\text{I}} (1) \text{ сх-ся}$

] $L > 1$ Выберем $\varepsilon: L - \varepsilon = 1, \varepsilon = L - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt[k]{p_k} > 1 \xrightarrow{\text{I}} (1) \text{ расх-ся}$

Замечание. 1. В I части можно заметить пер-во на $\sqrt[k]{p_k} < 1$
 Пр. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} < 1, k > 1$ ряд расх-ся.
 $\xrightarrow{\text{т.3}} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \geq 1, k > 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сх-ся. $\sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} < 1$

В этом случае "признак не работает"

2. $L = 1$ в части II - признак не работает

Пр. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$ расх-ся

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$ сх-ся.

Теорема 7 (признак Даламбера)

$\triangle$ ряд (1). $p_k > 0, k \geq k_0$

I.] $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ ($\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$) $\forall k \geq k_0 \geq 1$

Тогда (1) сх-ся (расх-ся)

II.] $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$

Если $L < 1$, ряд (1) сх-ся

$L > 1$, ряд (1) расх-ся.

Д-во: I. $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q = \frac{q^{k+1}}{q^k} \quad q \in (0, 1), \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ - сх-ся $\xrightarrow{\text{т.5}} (1) \text{ сх-ся}$

$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1, p_{k+1} \geq p_k > 0, \text{ т.е. } p_k \neq 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow \text{ряд (1) расх-ся}$

II как в т.6.

Замечание 1, 2 - те же, что и Т. 6.

Замечание Обобщение Т. 6, 7

$$Т. 6 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} < 1 \Rightarrow (1) \text{ сх-ся} \quad 2-тб.$$

$$Т. 7 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} < 1 \Rightarrow (1) \text{ сх-ся}$$

2-м, что признак Коши явл. более сильным, чем пр. Даламбера.

Ув. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = L$ обратное не верно

Д-во: Пр. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^k}{2^k}$, $p_k = \frac{3+(-1)^k}{2^k} > 0$

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{3+(-1)^{k+1}}{2(3+(-1)^k)} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k-\text{чет} \\ 1, & k-\text{нечет} \end{cases}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} \nexists, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = 1 \text{ "не работает"}$$

$$\sqrt[k]{p_k} = \frac{\sqrt[k]{3+(-1)^k}}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1, \text{ ряд сх-ся}$$

Коши О. П. (1789-1857)

1807 г., Мерзбург, 1816
~ 800 н.тр. 3-й р.

Даламбер (1717-1783)

Лебениц, Эльзас. Энциклопедист
"Силою таланта вперед,
и вода к воде придет"
математик

Лемма 1. $\exists a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a$ (возм. $a = +\infty, a = -\infty$)

2. $\exists a_n > 0, a_n \rightarrow a \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \rightarrow a$

Д-во: 1. а) $a = 0 \Rightarrow \exists c > 0: |a_n| \leq c \quad \forall n = 1, 2, \dots$ (сх $\Rightarrow$ сгр.)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Delta n > N, \quad d_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_N}{n} + \frac{\overbrace{a_{N+1} + \dots + a_n}^{n-N}}{n}$$

$$|d_n| < \frac{c \cdot N}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n-N}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е. } d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$N_1: \frac{cN}{N_1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta) 0 < a < +\infty$$

$$\Delta d_n - a = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a = \frac{a_1 + \dots + a_n - na}{n} = \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \dots + (a_n - a)}{n}$$

$$a_n - a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ т.е. } d_n \rightarrow a.$$

$$\beta) a = +\infty \quad 2-тб.$$

$$\gamma) a = -\infty$$

$$2. \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{1}{n} \ln(a_1 \dots a_n) = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln a, \text{ если } a_n \rightarrow a \Rightarrow \ln a_n \rightarrow \ln a \text{ (из 1.)}$$

из непрерыв. $\ln x \rightarrow 1$

Д-во ув.

$$\exists \frac{p_{n+1}}{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

$$\sqrt[n]{p_n} = \sqrt[n]{\frac{p_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1} = \sqrt[n]{a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

$a_n \rightarrow L$ по лемме

3° Интегральный признак Коши-Манафремо.

Теорема 8 (пр. К-м)

 $\Delta f(x)$ на $x \geq 1$, $f(x) \geq 0$, не возр. на $x \geq 1$.Тогда две с-ти рядов $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ (3) $\Leftrightarrow$, чтобы сходился числовой $\{a_n\}$ $a_n = \int_1^n f(x) dx$ (4), т.е. сходится $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Д-во:

Фикс. $\forall k \geq 2$, $\Delta x \in [k-1, k]$ $f(x) \downarrow \Rightarrow f(x) \leq f(k) \leq f(k-1) \quad \forall x \in [k-1, k]$ $f(x)$ монот. уб. $\Rightarrow$ интегр-на на $[k-1, k]$ Применяя нер-во $[k-1, k]$: $\int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx$

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1) \quad \forall k=1, 2, \dots$$

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f(1)$$

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x) dx \leq f(2)$$

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1)$$

$$\text{Добав. } S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$S_n - f(1) \leq \underbrace{\int_1^n f(x) dx}_{a_n} \leq S_{n-1} \Rightarrow S_n - f(1) \leq a_n \leq S_{n-1}$$

 $\{a_n\}$ - числовой ряд с-ти $\Leftrightarrow$ е.с.с.(3) с крест. чл., из Т.2 $\Rightarrow$ ряд е.с.с. $\Leftrightarrow$ с-ти $\{S_n\}$ из нер-во $\Rightarrow$, что $\{S_n\}$ с-ти $\Leftrightarrow \{a_n\}$ с-ти $\square$ Лекция N3
8.09.10Замечание $[1; +\infty) \rightarrow [m, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$

$$a_n = \int_m^{\infty} f(x) dx, \quad \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

Примеры. 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \leq 0, \quad \frac{1}{k^{\alpha}} \not\rightarrow 0 \quad \text{расх.}$$

$$\alpha > 0 \quad \frac{1}{k^{\alpha}} \downarrow 0, k \rightarrow \infty \quad f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \geq 0, \downarrow \quad \text{из Т.2 вытекает.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^d} \Leftrightarrow$$

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^d} = \begin{cases} \frac{x^{1-d}}{1-d} \Big|_{x=1}^n, & d \neq 1 \\ \ln x \Big|_{x=1}^n, & d = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{n^{1-d}-1}{1-d}, & d \neq 1 \rightarrow \frac{1}{d-1} \\ \ln n, & d = 1 \rightarrow \infty \end{cases}$$

$1-d < 0, d > 1$

$d \leq 1$ ряд расх.
 $d > 1$ ряд ссг.

$$2. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^d k}$$

$$\int_2^n \frac{dx}{x \ln^d x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^d x}$$

$d > 1$ ссг-сг
 $d \leq 1$ расх-сг.

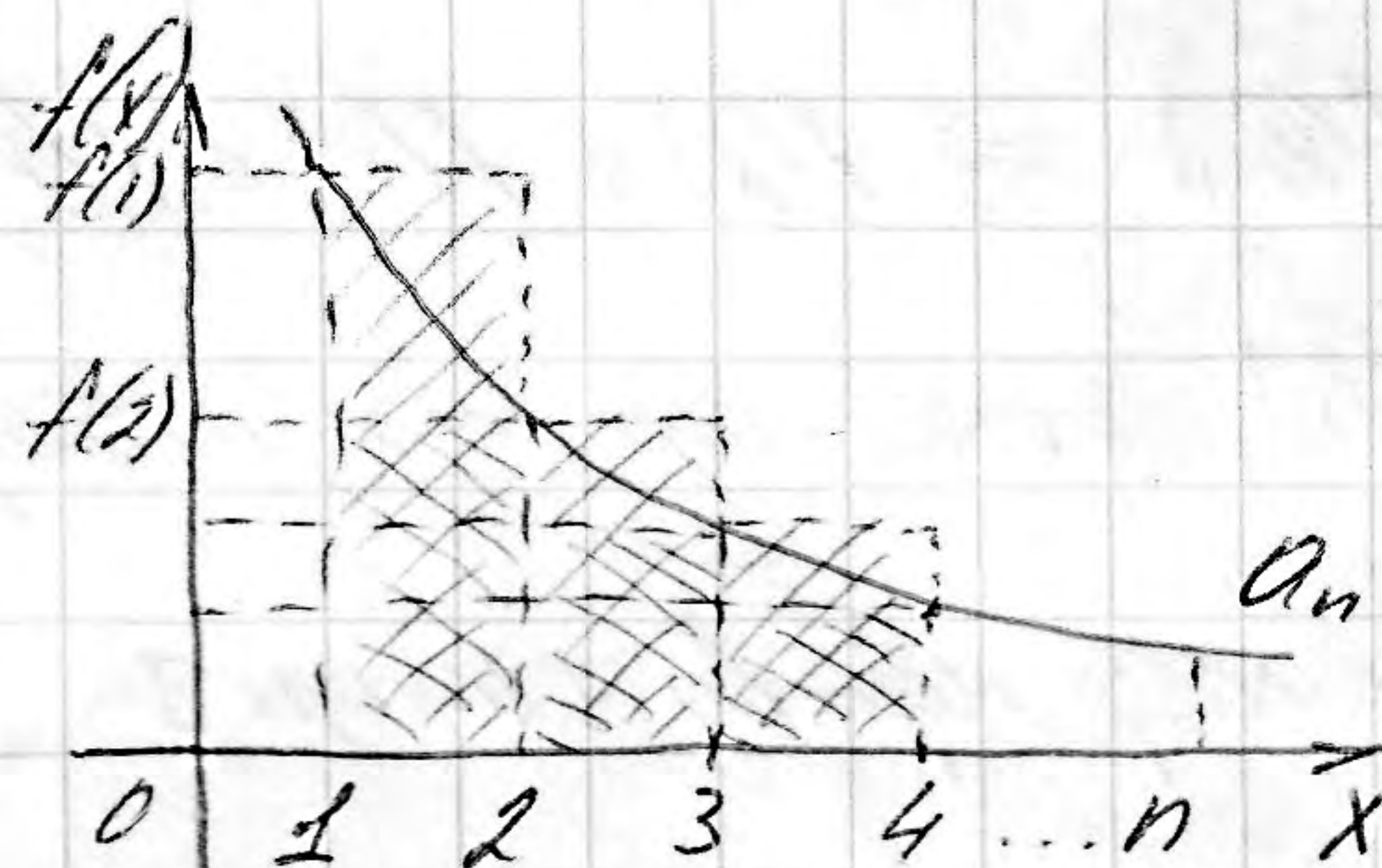
$$3. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^d \ln^{\beta} k}$$

$d > 1 \forall \beta$ ссг-сг
 $d < 1 \forall \beta$ расх-сг
 $d = 1 \begin{cases} \beta > 1 & \text{ссг-сг} \\ \beta \leq 1 & \text{расх-сг} \end{cases}$

Геометрические интерпретации

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq a_n$$

$$\sum_{k=2}^n f(x) \leq a_n$$



§3 Перестановка слагаемых в сходящихся числовых рядах.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Опр. Ряд (1) наз. абсолютно ссг-сг, если ссг-сг ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ (2)

Ув. Если ряд (1) ссг-сг абсолютно, то он ссг-сг
 из ссг (2) $\Rightarrow$ ссг (1)

$$\text{Т.к. (2) ссг-сг} \stackrel{\text{к.к.}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon \Rightarrow \stackrel{\text{к.к.}}{\Rightarrow} (1) \text{ ссг-сг.}$$

Пр. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^d}, d > 1 \quad \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^d} \right| = \frac{1}{k^d}, \sum \frac{1}{k^d}$ ссг-сг при $d > 1 \Rightarrow$ ссг-абс.

$d=1 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \dots = \ln 2$ абс. не ссг-сг

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_{n+1}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [0, 1].$$

$$x=1 \quad \ln(1+1) = \ln 2 = \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{S_n} + R_{n+1}(1)$$

$$|\ln 2 - S_n| = |R_{n+1}(1)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow S_n \rightarrow \ln 2 = S \text{ ряд ссг-сг}$$

Опр. Ряд (1) наз. ссг-сг условно, если ряд (1) ссг-сг, а ряд (2) из него расх-сг.

$$a+b=b+a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Ряд (1) - ?

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + C + o_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Delta \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2n}\right) + \dots$$

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2n}\right) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) + \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} H_{2n} = \frac{1}{2} H_{2n} - \frac{1}{2} H_n = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2n + C + o_{1n} - \ln n - C - o_{2n}) = \frac{1}{2} \ln 2 + o_{3n} = \frac{1}{2} \ln 2 + o_n \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2. \\ &\quad = o(1) \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$S_{3n-1} \quad \frac{1}{4n} = o(1)$$

$$\forall S_n \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2$$

$$S_{3n-2} \quad \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} = o(1)$$

$$\Delta \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots = \frac{3}{2} \ln 2.$$

Теорема 9 (Т. Римана)

Пусть ряд (1) с.с. ун.в. Тогда для $\forall$ наперед взятого действ. числа L можно так переставить слагаемые ряда (1), что вновь полученный ряд будет иметь сумму $= L$.

Д-во: наладим структуру $\forall$ ун. с.с. ряда (1)

обозн. p_k - неотриц. слагаемые ряда (1), взятые в том же порядке, что в (1).

через q_k обозн. модули отриц. членов ряда (1), взятые в том же порядке, что в (1).

Утв. и числа $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ - бесконечно много (иначе ряд с.с.с. бы абс.с.с.)

Ряд (1) с.с.с. $\Rightarrow u_k = o(1), k \rightarrow \infty \Rightarrow p_k = o(1), q_k = o(1), k \rightarrow \infty$.

$$P \sim \sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad Q \sim \sum_{k=1}^{\infty} q_k$$

Утв. и ряд P , и ряд Q расходятся

Д-во. обозн. S_n - част. сумма ряда (1)

P_n - сумма неотр. слагаемых, входящих в S_n

Q_n - сумма модулей отриц. слагаемых, вх. в S_n .

$$S_n = P_n - Q_n$$

III Если ряд P сход., то $\{P_n\}$ с.с.с. $\Rightarrow Q_n = P_n - S_n$ тоже с.с.с. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд Q тоже с.с.с.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = P + Q \Rightarrow \text{ряд (1) с.с.с. абс.с.с. ?!} \Rightarrow P \text{ расх.с.с. (к+}\infty\text{)}$$

Аналогично ряд Q расх.с.с. (к+ ∞) $\square$

$P_n \rightarrow +\infty$ в.д. по н.с.

Вывод: как для ряда P , так и для ряда Q после удаления $\forall$ конечного числа слагаемых из оставшихся слагаемых можно выбрать столько, что их сумма превзойдет $\forall$ наперед взятое число.

Фикс. $\forall L \in \mathbb{R} (\exists L > 0)$

Выберем из ряда P ровно столько слагаемых, чтобы их сумма превзошла L

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k > L \quad (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} \leq L)$$

Вспомогат. из полученной суммы ровно столько первых слаг. ряда Q , чтобы разность стала $< L$.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k - q_1 - q_2 - \dots - q_k < L$$

Добавим к посл. сумме ровно столько слаг. следующих чисел p_k , чтобы $\Sigma < L$

$$p_1 + \dots + p_k - q_1 - q_2 - \dots - q_k + p_{k+1} + \dots + p_{k_2} > L \quad \text{и т.д.}$$

Получим некоторый ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$

В этот ряд войдут все слаг. ряда (1), т.к. на каждом шаге мы добавим хотя бы одно числ. u_k или одно отриц. u_k .

Д-ем, что $\sum_{k=1}^{\infty} u_k' = L$.

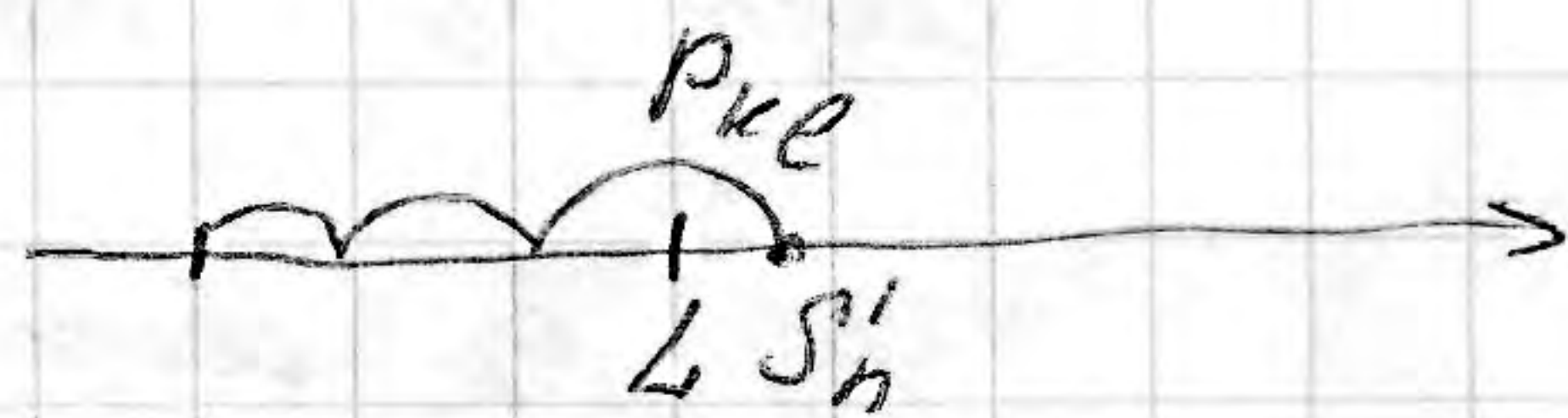
S_n' — частичная сумма нового ряда

$\forall S_n'$ состоит из последовательной группы полож. и отриц. слаг.

1) $\exists S_n'$ оканчивается завершённой группой

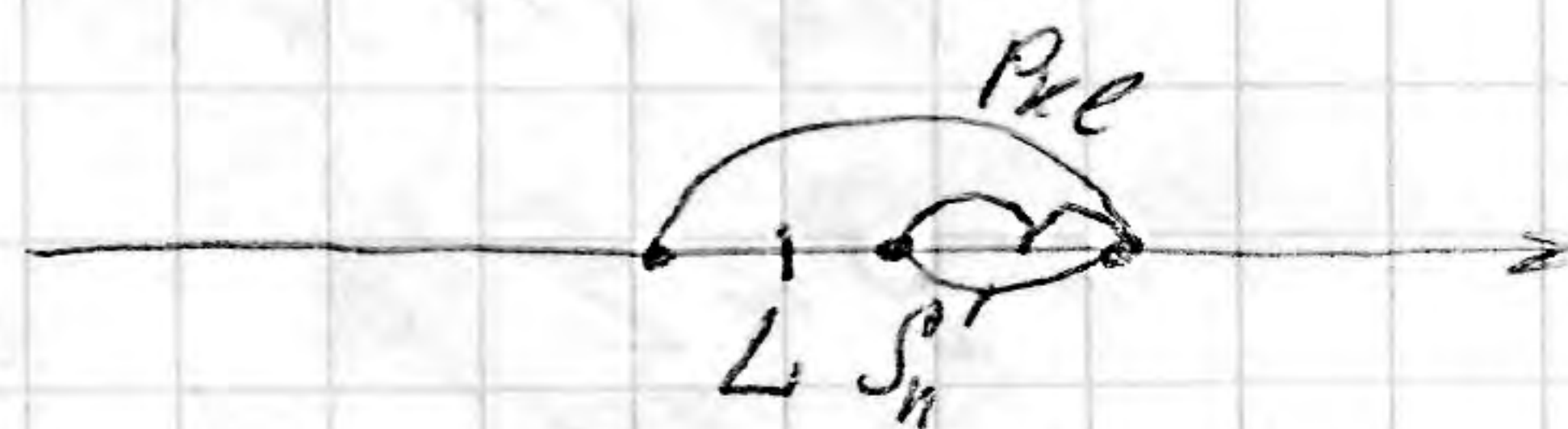
Тогда S_n' отл. от L не более чем на модуль посл. слаг. в послед. группе.

$$|S_n' - L| \leq p_{k_2}$$



2) $\exists S_n'$ оканчивается незавершённой группой

Тогда S_n' отл. от L не более чем на модуль посл. слаг. в предпослед. группе



$\Rightarrow$ достаточно доказать, что посл.-ть последних слаг. в группах A_n беск. мал.

$p_{k_1}, q_{k_2}, p_{k_3}, \dots$ — б.м.?

т.к. $p_k = o(1), q_k = o(1) \Rightarrow \{p_{k_i}, q_{k_j}\}$ — б.м. $\Rightarrow S_n' \rightarrow L, n \rightarrow \infty$

Д-ть, что утв. теоремы справедливо для $L = +\infty, -\infty, \infty$.

Б. Риман

1826 — 1866

1851 г. диссертация

1862 г. забыл чашечкой 15 лет

Лекция №4
13.09.10

Теорема 10 (теорема Коши)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Ряд (1) сходя абсолютно. Тогда $\forall$ ряд, полученный из (1) путём некоторой перестановки слагаемых, с.с.с. абсолютно и имеет ту же сумму, что и (1).

До-во:

$$\text{Ряд (1) с.с.с. абс.} \Leftrightarrow (\exists M > 0 : \sum_{k=1}^n |u_k| \leq M \quad \forall n)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : \sum_{k=N_0+1}^n |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ получен из ряда (1) путём перестановки некоторых слагаемых.

$$S_n' = \sum_{k=1}^n u_k'$$

До-во: 1) ряд $\sum u_k'$ сходя и имеет сумму S' - ряда (1)

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} |u_k'| - \text{с.с.с.}$$

$$1) \exists \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |S_n' - S| < \varepsilon$$

Поскольку N можно выбрать, что все первые N_0 слагаемых ряда (1) содержатся в S_n' при $n \geq N$.

$$\Delta \quad \forall n > N \quad |S_n' - S| = \left| \left(S_n' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right) \right| \leq$$

$$< \underbrace{\left| S_n' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right|}_{\text{с.с.с.}} + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right| < \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2) $\Rightarrow$ из 1) вместо (1) и $\sum u_k$ берём $\sum |u_k|$ и $\sum |u_k'|$

§4 Сложение и умножение сходящихся числовых рядов.

$$\Delta \text{ два с.с.с. ряда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k = U, \sum_{k=1}^{\infty} v_k = V, u_k, v_k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Частичные суммы U_n, V_n .

Теорема 11. Ряды (1) с.с.с., их суммы U, V , тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$

с.с.с. и его сумма равна $U + V$, т.е. с.с.с. ряды можно почленно складывать.

$$\text{Запишем } \sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$$

если ряды с.с.с. ун., то можно про такой ряд сказать нечто.
а если ряды с.с.с. абс. то этот ряд с.с.с. и его сумма равна $U + V$.

$$\text{Д-во: } \forall n \quad \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = u_n \pm v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \pm v \quad \square$$

Теорема 12

Два ряда с абсolutно и их суммы u, v .

Тогда ряд, составленный из всевозможных произведений вида

$u_k \cdot v_l, k, l \in \mathbb{N}$ заданных в $\forall$ порядке, с-с абс и его сумма $= u \cdot v$.

Д-во: 1) Д-ем, что полученный ряд с-с абсolutно.

Обозн. через ω_k произведение вида $u_m v_l$

$$\sum_{k=1}^n |\omega_k| = S_n \quad \text{где } \forall n.$$

Обозн. через p -мной из номеров m, l чисел $u_m, v_l \Rightarrow$ входящих в S_n .

$$\Rightarrow S_n \leq \underbrace{(|u_1| + |u_2| + \dots + |u_p|)}_{\text{ср.}} \cdot \underbrace{(|v_1| + |v_2| + \dots + |v_p|)}_{\text{ср.}}$$

Т.к. ряды (1) с-с абс, то част. суммы рядов $\sum_{k=1}^n |u_k|, \sum_{k=1}^n |v_k|$ ср. (Т.2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \{S_n\} - \text{ср.} \xrightarrow{\text{Т.2}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k| - \text{с-с абс.}$$

2) Д-ем, что $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k = u \cdot v$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k$ с-с абс. $\xrightarrow{\text{Т.10 (Коши)}}$ во слог. можно переставить произвольно, сумма ряда не изменится

Переставим слагаемые так, что част. суммы ряда имеют алг. вид:

$$W_n = (u_1 + \dots + u_n)(v_1 + \dots + v_n) = u_n \cdot v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{переставивший ряд с-с абс и } u \cdot v \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k = u \cdot v \quad \square$$

$$\begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_l & \dots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_l & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_k v_1 & u_k v_2 & \dots & u_k v_l & \dots \end{pmatrix}$$

Правило Коши перемножения рядов

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k \right) &= \underbrace{u_1 v_1}_{\omega_1} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1)}_{\omega_2} + \underbrace{(u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1)}_{\omega_3} + \dots + \\ &+ \underbrace{(u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \dots + u_k v_1)}_{\omega_k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k. \end{aligned}$$

Теорема 13 (теорема Мертенса)

1) если ряд (1) с.с. абсолютно, а второй с.с. хотя бы условно.

Тогда ряд, полученный перемножением рядов (1) по правилу Коши с.с. и его сумма равна $U \cdot V$.

Д-во: 1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $u_k = u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \dots + u_k v_1$

$$W_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) \quad \text{①}$$

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ с.с. абсолютно, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ с.с.

$$d_n = V - \sum_{k=1}^n v_k = o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\exists M = \text{const} > 0 : |d_n| \leq M, \forall n.$$

$$\text{① } u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + \dots + u_n V_1 = u_1 (V - d_n) + u_2 (V - d_{n-1}) + \dots + u_n (V - d_1)$$

$$V_k = V - d_k \quad \left| \quad = \underbrace{u_n \cdot V}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} U \cdot V} - \beta_n, \text{ где } \beta_n = u_1 d_n + u_2 d_{n-1} + \dots + u_n d_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ достаточно д-ть, что $\beta_n = o(1), n \rightarrow \infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ с.с. абс.} \Rightarrow \exists M_1 > 0 : \sum_{k=1}^n |u_k| \leq M_1, \forall n.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m : \sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$$

$$d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists n, \forall n > n, |d_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$$

$$\forall n > m \quad \beta_n = (u_1 d_n + u_2 d_{n-1} + \dots + u_m d_{n-m+1}) + (u_{m+1} d_{n-m} + \dots + u_n d_1)$$

3) $n-m > n$, т.е. $n > m+m$, $\Rightarrow$ справедливы все оценки:

$$|\beta_n| \leq |\dots| + |\dots| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \cdot \sum_{k=1}^m |u_k| + M_1 \sum_{k=m+1}^n |u_k| < \frac{\varepsilon \cdot M_1}{2M_1} + M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_1} = \varepsilon$$

$$\forall n > N = m + m,$$

$$\Rightarrow \beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} u_k = U \cdot V$$

Пр. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}, u_k = v_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right)^2 - \text{по Коши расх-ся, } \sum u_k, \sum v_k - \text{с.с. укл.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в т. Мертенса удовлетворяется с.с. укл. с.с. одного ряда не может.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)^2 \underset{\substack{\text{по Коши} \\ \text{усл. ряд}}}{=} \ln^2 2.$$

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

Л. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

Расс. сходимости ряда можно исследовать по доказанным признакам сходимости рядов с неотрицательными членами.
и расходимости ряда

1°. Пошаговости с ограниченным членением.

Всп. Числ. посл. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ мон. посл. с оог. членением, если сходится тот ряд.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k| \quad (1)$$

Пр. 1. $v_k = k$ мон. членение

$$\sum_{k=1}^n |v_{k+1} - v_k| = \sum_{k=1}^n (k+1 - k) = \sum_{k=1}^n 1 = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{ряд (1) расх-ся}$$

2. $v_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0$

$$\sum_{k=1}^n |v_{k+1} - v_k| = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

ряд (1) сх-ся $\Rightarrow \{ \frac{1}{k} \}$ имеет оог. членение.

$v_k = 10 + \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 10$ - имеет оог. член.

$$3 \quad v_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \sum_{k=1}^n |v_{k+1} - v_k| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n+1} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

ряд (1) расх-ся $\Rightarrow \{ \frac{(-1)^{k-1}}{k} \}$ не имеет оог. член.

Лем. 1 Если $\{v_n\}$ имеет оог. член, то она сх-ся.

До-во: Из сходимости ряда (1) $\Rightarrow$ сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) = S$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$\Rightarrow \{v_n\}$ - сх-ся

Лем. 2 Великая монотонная и ограниченная посл. имеет оог. членение.

Лекция №5
15.09.10

До-во: $\{v_n\}$ - монот., оог. $\Rightarrow$ сх-ся $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$

$$S_n = \sum_{k=1}^n |v_{k+1} - v_k| = \left| \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) \right| = |v_{n+1} - v_1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |v - v_1| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ - сх-ся и ряд (1) сх-ся

Ряд (1) с.с. $\Rightarrow \exists N \cdot \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k - v_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{2M}$

Тогда будем: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} \right| \leq$
 $\forall n > N \leq M \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_k - v_{k+1}| + |v_{n+p}| + |v_{n+1}| \right) < M \left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M} \right) = \varepsilon$
 $\stackrel{\text{т.т.}}{\Rightarrow} \text{ряд (1) с.с.}$

II. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ - с.с. $\Rightarrow \{S_n\}$ - о.р. $\Rightarrow \exists M > 0 : |S_n| \leq M, \forall n$
 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ - с.с. $\Rightarrow \exists S : \sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$

$\{v_k\}$ - с.с. о.р. $\Rightarrow$ с.с. ряд (1) и с.с. $\{v_k\}$:

$$\exists v : v_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k - v_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Тогда будем: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} \right| \leq$
 $\leq M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_k - v_{k+1}| + |S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n > N$
 $\text{т.т. } S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \cdot v - S \cdot v = 0 \stackrel{\text{т.т.}}{\Rightarrow} \text{ряд (2) с.с.}$

Следствие из I пр. Абеля

Теорема 15 (признак Дирихле-Абеля)

Δ ряд (2). Пусть: 1) посл. $\{S_n\}$ част. сумм ряда $\sum u_k$ о.р.
 2) $\{v_k\}$ - невозр. б.м. посл.

Тогда ряд (2) с.с.

Д-во. Выпишем метал. усл. I пр. Абеля: $\{S_n\}$ - о.р., $v_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$\{v_k\}$ - с.с. $\Rightarrow$ о.р. $\stackrel{\text{т.т. 2}}{\Rightarrow} \{v_k\}$ имеет о.р. $\{v_k\}$ - монот.

Т.15 следует из Т.14 I.

Теорема 16 (признак Лейбница)

Δ знакочередующийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k, p_k > 0$ (3)

$\exists \{p_k\}$ - невозр. б.м. посл.

Тогда ряд (3) с.с.

Д-во: $u_k = (-1)^{k-1} \Rightarrow \{S_n\}$ - о.р. $\stackrel{\text{т.15, 14.1}}{\Rightarrow} \text{ряд (3) с.с.}$
 $p_k = p_k$

Пр. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ - с.с., $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\log k}$ - с.с.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^d}$ исслед. на абс. и ун. сх-ств.

1) $d \leq 0$ наруш. необход. ун. сх-ти $\Rightarrow$ ряд расх-ся.

2) $d > 0$

Лем. $\frac{|\cos kx|}{k^d} \leq \frac{1}{k^d} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ряд сх-ся абс.}$

3) Д-ть, что при $0 < d \leq 1$ ряд абс. не сх-ся.

$$\frac{|\cos kx|}{k^d} \geq \frac{\cos^2 kx}{k^d} = \frac{1 + \cos 2kx}{2k^d} \quad \sum \frac{1}{k^d} - \text{расх.}, \quad \sum \frac{\cos 2kx}{k^d} - \text{сх-ся по Д-А (7.15)}$$

$$\sum_{k=1}^n \cos 2kx \left| \frac{2 \sin x}{2 \sin x} \right| \quad x \neq \pi k \quad x = \pi k - \text{р абс. расх.}$$

по 1-му сравн. ряд абс. не сход.

4) Сходимость при $0 < d \leq 1$

$$u_k = \cos kx, \quad v_k = \frac{1}{k^d} \searrow 0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \cos kx \left| \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \quad \frac{x}{2} \neq \pi n, \quad x \neq 2\pi n$$

Если $x = 2\pi n$, то иск. ряд $\sum \frac{1}{k^d}$ расх-ся

$$|S_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} = M \quad x - \text{фикс.}$$

Отв. $d > 1$ ряд абс. сход. $\forall x \in \mathbb{R}$

$0 < d \leq 1$ ряд сх. ун. $\forall x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$

$d < 0 \quad \forall x \quad 0 < d \leq 1 \quad x = 2\pi n - \text{ряд расх-ся}$

§6. Бесконечные произведения.

Δ числ. посл. $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}, v_k \in \mathbb{R}$

$$v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k \cdot \dots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k \quad (1) - \text{беск. произведение}$$

v_k - общий член беск. пр.

$$\prod_{k=1}^n v_k = P_n - n\text{-ое частичное произведение.}$$

Вместе
1540-1603
был общ. кот. ввр-ся.

Опр. Б пр. (1) маж. сх-ся, если $\{P_n\}$ его частичных произведений имеет конечный предел, отличный от нуля при $n \rightarrow \infty$.

$$P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P, \quad P \neq 0. \quad (P - \text{значение пр. (1)})$$

Т.к. $P \neq 0$ для сх. произв., то Δ произв. (1) с $v_k \neq 0, \forall k$.

Теорема 17 (необх. ун. сх-ти беск. пр.)

Для того чтобы б. пр. (1) сходилась необход., чтобы $v_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$.

$$\text{Д-во.} \quad P_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P, \quad v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{P}{P} = 1$$

$v_k \neq 0, P \neq 0$

Т.к. $v_k \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$, то $\forall k > N \quad v_k > 0$ для с.с. д.пр. $\Rightarrow$ также Δ д.пр. с $v_k > 0 \quad \forall k$

Замечание. Добавление или отбрасывание из (1) конечного числа первых сомножителей ($\neq 0$) не влияет на с.с.-ть или расх.-ть пр. (1).

Пр. $\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} \quad k \rightarrow \infty \quad \frac{x}{2^k} \rightarrow 0, \cos \frac{x}{2^k} \rightarrow 1$ необх. усл. с.с.-ти вып.

$$x=0 \quad \prod_{k=1}^{\infty} 1 = 1$$

$$\text{] } x \neq 0 \quad P_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}} =$$

$$n \gg 1: \frac{|x|}{2^n} \in (0, \pi) \quad \left| \begin{array}{l} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \end{array} \right. \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k}$$

Теорема 18 Для того чтобы д.пр. (1) с $v_k > 0$ сходилась, $\Leftrightarrow$, чтобы сходился числ. ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k \quad (2)$

При этом значения P пр. (1) и суммы S ряда (2) связаны:

$$P = e^S$$

$$\text{Д-во: } S_n = \sum_{k=1}^n \ln v_k = \ln \prod_{k=1}^n v_k = \ln P_n$$

$$S_n = \ln P_n \Rightarrow \text{для с.с.-ти } \{P_n\}, \text{ т.е. (1)} \Leftrightarrow \text{с.с.-ть } \{S_n\}, \text{ т.е. (2)}$$

$$P_n = e^{S_n} \quad n \rightarrow \infty \quad P = e^S \quad \blacksquare$$

Т.к. $v_k \rightarrow 1$ - необх. усл. с.с.-ти (1) запишем $v_k = 1 + u_k, u_k \rightarrow 0$ - необх. усл. с.с. (2)

$$\text{с.с. (1)} \xrightarrow{\text{т.18}} \text{с.с. ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k) \quad (4)$$

Теорема 19 Δ д.пр. $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k) \quad (5), u_k > -1$

] u_k сохр. знак. Тогда для с.с.-ти (5) $\Leftrightarrow$, чтобы с.с.-ть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (6)$

Д-во: $u_k \rightarrow 0$ - необх. усл. с.с.-ти и (5), и (6)

] $u_k \rightarrow 0, \ln(1+u_k)$ - сохр. знак

$$\frac{\ln(1+u_k)}{u_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow \text{ряды (4), (6), т.е. (5), (6) с.с.-и расх. сгруппированы} \quad \blacksquare$$

§7. Двойные и повторные ряды.

Лекция №6
20.09.10.

$$(a_{ke})_{k,e=1}^{\infty}, a_{ke} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1e} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2e} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{ke} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\sum_{e=1}^{\infty} a_{ke}, k=1,2,\dots \quad (2) \quad \text{строчные суммы}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{e=1}^{\infty} a_{ke} \right) \quad (3) \quad \text{мат. повторный ряд}$$

Опр. Повт. ряд (3) мат. сходящийся, если сх-ся все ряды по строкам (2),

$$\sum_{e=1}^{\infty} a_{ke} = A_k - \text{их суммы, и сх-ся мат. ряд } \sum_{k=1}^{\infty} A_k.$$

$$\sum_{e=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ke} \right) \quad (4) \quad \text{мат. повторный ряд (сх-ть аналогично (3))}$$

$$\text{Прямоугольные частичные суммы } S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{e=1}^n a_{ke}$$

Двойной ряд $\sum_{k,e=1}^{\infty} a_{ke} \quad (5)$ мат. сх-ся, если $\exists$ двойной предел мн-ва $\{S_{mn}\}$

$$\exists \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = S - \text{сумма ряда (5)}$$

Ув. Если в ряде (5) $a_{ke} = b_k \cdot c_e$, где $\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \sum_{e=1}^{\infty} c_e$ - сх-ся, то ряд (5) сх-ся.

Д-во: $S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{e=1}^n (b_k \cdot c_e) = \sum_{k=1}^m b_k \cdot \sum_{e=1}^n c_e \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sum_{e=1}^{\infty} c_e$, т.е. (5) сх-ся.

Необходимое усл. сх-ти дв. ряда: $a_{mn} = S_{mn} + S_{(m-1)(n-1)} - S_{(m-1)n} - S_{m(n-1)} =$

$$= (S_{mn} - S_{(m-1)n}) - (S_{m(n-1)} - S_{(m-1)(n-1)}) \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} (S - S) - (S - S) = 0$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn} = 0.$$

Теорема 20. Пусть сх-ся все ряды $\sum_{e=1}^{\infty} a_{ke} \quad (2)$ по строкам м-цы (1) и сх-ся гв.р. (5)

Тогда сх-ся и повторный ряд (3), его сумма равна сумме р. (5)

Д-во: опред. сх-ти повт. ряда (3) через S_{mn} : $S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{e=1}^n a_{ke}$.

Т.е. все ряды (2) сх-ся, то можем утверд. $n \rightarrow \infty$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} = \sum_{k=1}^m A_k \Rightarrow \text{где сх-ти ряда (3) требуется}$$

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} - \text{г-ть при усл., что } \exists \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} \text{ и сх-ся все (2), г-ть равносв. этим пределам.}$$

по упр. $\exists \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = S : \forall \varepsilon > 0 \exists m_0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > m_0, \forall n > n_0 : |S_{mn} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$S - \frac{\varepsilon}{2} < S_{mn} < S + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S - \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = Y_m \leq S + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |Y_m - S| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall m > m_0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} = S$$

Аналогично, из сх-ты всех рядов по сдв. (1) и сх-ты (5) $\Rightarrow$ сх-ты по р. (4) и рав-во их сумм.

Примеры 1) Из сх-ты гл. ряда $\neq$ сх-ты рядов по строкам.

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & +1 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \end{array}$$

Все ряды (2) расх-ся $\Rightarrow$ постр. р. (5) расх-ся

$$S_{mn} = \begin{cases} 0 \\ a_{mn} \end{cases} \quad \forall m, n.$$

по сдв. ряды сх-ся и $\sum u_k = 0$

и ряд (4) сх-ся и его $S = 0 =$ сумме гл. р. (5) (как и в 7.20)

$$a_{mn} \rightarrow 0 \Rightarrow S_{mn} \rightarrow 0 \Rightarrow (5) \text{ сх-ся и его } S = 0$$

$$2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \end{array} \right)$$

$$S_{m,n} \in \{0, 1\} \Rightarrow \exists \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} \Rightarrow (5) \text{ расх.}$$

ряды (2) сх-ся их $\sum = 0 \Rightarrow (3) \text{ сх, } S = 0$
по сдв. ряды сх-ся, $S = 0$ кроме $\{0, 1\} \Rightarrow (4) \text{ сх } S = 1$

Теорема 21 (кр. сх-ты гл. ряда с неотриц. членами).

Для того чтобы гл. ряд (5) с неотр. членами сх-ся $\Leftrightarrow$, чтобы мн-во $\{S_{mn}\}$ по чл. сумм было ограничено.

Д-во:

$$\Rightarrow \exists (5) \text{ сх-ся, } a_{ke} \geq 0.$$

Д-то $\{S_{mn}\}$ - опр.

Очевидно, что $S_{mn} \leq S$ - суммы (5) $\forall m, n$, т.к. $a_{ke} \geq 0$.

$$(\text{III}) \exists S_{m_0 n_0} : S_{m_0 n_0} > S \Rightarrow S_{mn} \geq S_{m_0 n_0} \quad \forall m \geq m_0, n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} \geq S_{m_0 n_0} > S \Rightarrow S > S > 1$$

$$\Rightarrow \exists \{S_{mn}\} \text{ - опр. Д-то сх-ты (5)}$$

Т.к. $\{S_{mn}\}$ опр, то $\exists \sup_{m,n} S_{mn} = S$, $S_{mn} \leq S, \forall m, n$

По опр. суп $\forall \varepsilon > 0 \exists S_{m_0 n_0} \in \{S_{mn}\} : S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leq S$

т.к. $a_{ke} \geq 0 \forall k, e$, то $\forall m > m_0, n > n_0 \quad S_{mn} \geq S_{m_0 n_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leq S_{mn} < S, \quad \forall m > m_0, n > n_0 \Rightarrow \lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = S$$

Опр. Двойной ряд (5) наз. абсолютно с.с., если с.с. ряд $\sum_{k,e=1}^{\infty} |a_{ke}|$ (3)

Теорема 22. Если дв. ряд (5) с.с. абсолютно, то он с.с., т.е. $\sum_{k,e=1}^{\infty} a_{ke} = S \Rightarrow \sum_{k,e=1}^{\infty} a_{ke} = S$

Д-во: Δ им-ва $p_{ke} = \frac{|a_{ke}| + a_{ke}}{2} \geq 0$

$$0 \leq p_{ke} \leq |a_{ke}|$$

$$q_{ke} = \frac{|a_{ke}| - a_{ke}}{2} \geq 0$$

$$0 \leq q_{ke} \leq |a_{ke}|$$

Т.к. ряд (5) с постр. членами с.с., то по Т.21 им-во его частичных сумм $\{S_{mn}\}$ опр. $\Rightarrow$ ч.с. сумм рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} p_{ke}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} q_{ke}$ сущ.

$\Rightarrow$ т.к. $p_{ke}, q_{ke} \geq 0$ по Т.21 эти ряды с.с.

$a_{ke} = p_{ke} - q_{ke}$, т.к. ряды P, Q с.с., то Δ ряд (5) с.с.

Δ ряд $\sum_{z=1}^{\infty} a_z$ (6) составлен из чл-ов м-цы (1), занумерованных в произвольном порядке.

$$\Delta \sum_{e=1}^{\infty} a_{ke} \quad (2), \quad \sum_{e=1}^{\infty} |a_{ke}| \quad (2')$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} a_{ke} \quad (3), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} |a_{ke}| \quad (3')$$

$$\sum_{e=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ke} \quad (4), \quad \sum_{e=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ke}| \quad (4')$$

$$\sum_{k,e=1}^{\infty} a_{ke} \quad (5), \quad \sum_{k,e=1}^{\infty} |a_{ke}| \quad (5')$$

Теорема 23. Если с.с. хотя бы 1 из рядов (3')-(6'), то с.с. все ряды (3)-(6) и суммы их равны между собой. (с.с. все (3')-(6') и суммы их равны)

Д-во: Для р. (4) все аналогично (3) с.с. Δ

$$\text{Схема: } \begin{array}{ccc} (3') & \xrightarrow{1} & (6') \Rightarrow (6) \\ & \nwarrow \quad \searrow & \\ & (3) & \xleftarrow{2} (5) \Rightarrow (5) \end{array}$$

$$1) \quad (3') \Rightarrow (6')$$

$$\text{Обозн. } \tilde{S} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} |a_{ke}|, \quad \tilde{S}_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{e=1}^n |a_{ke}|$$

$$\tilde{S}_{mn} \leq \tilde{S} \quad \forall m, n$$

$$\text{Фикс. } \forall p \in \mathbb{N} \text{ и } \Delta \tilde{S}_p = \sum_{z=1}^p |a_z|$$

Найдём такое большое m, n : все $a_z, z \leq p$ содержатся в $S_{mn} =$

$$\Rightarrow \tilde{S}_p \leq \tilde{S}_{mn} \leq \tilde{S} \Rightarrow \tilde{S}_p \leq \tilde{S}, \quad \forall p \stackrel{T.2}{=} \text{ ряд (6') с.с.} \Rightarrow \text{ ряд (6) с.с.}$$

$$2) \quad (\tilde{6}) \Rightarrow (\tilde{5}) \Rightarrow (5) \sim$$

Фикс. $\forall m, n, \Delta S_{mn}$

$\exists$ такое большое число p что все m -та суммы S_{mn} содержится в суммах $S_p \Rightarrow \tilde{S}_{mn} \leq \tilde{S}_p \leq \tilde{S}, \tilde{S} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tilde{S}_{mn} \leq \tilde{S}, \forall m, n \stackrel{T.21}{\Rightarrow} (\tilde{5}) \text{ с.к.} \stackrel{T.22}{\Rightarrow} p.(5) \text{ с.к.-с.}$$

$$3) \quad (\tilde{5}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S} = \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}| \Rightarrow \text{каб. суммы } p.(\tilde{2}) \text{ с.к.} \stackrel{T.2}{\Rightarrow} p.(\tilde{2}) \text{ с.к.-с.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p.(2) \text{ с.к.-с.}$$

$$p.(\tilde{5}), (\tilde{2}) \text{ с.к.} \stackrel{T.20}{\Rightarrow} (\tilde{3}) \text{ с.к.-с.}$$

$$(\tilde{5}) \Rightarrow (5), (2) \stackrel{T.20}{\Rightarrow} (3) \text{ с.к.-с.} \text{ и имеет ту же сумму, что и } p.(5).$$

Д-ть, что (8) и (5) имеют одинаковые суммы

По т.Кампи слагаемые в ряде (6) можно переобавить так, что пош. по каб. суммы будет содержать подполн. $\{S_{mn}\}$

$$S_{mn} \rightarrow S - \text{сумма (5)} \Rightarrow \text{и сумма (6)} = S$$

Лекция N 7
22.09.10

§8 Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1) \quad \text{сход, или сход } S_n \rightarrow S, \quad S - \text{сумма ряда}$$

$$\text{и } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ расход.}$$

Обобщенные методы суммирования

Требования

1) Регулярность - если ряд (1) с.к.-с., то сумма S' , то он имеет обобщ. сумму $= S$.

2) Линейность

$$\sum u_k \sim U_{об.} - \text{обобщ. сумма}$$

$$\sum v_k \sim V_{об.}$$

$$\left| \begin{array}{l} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) \sim \\ \sim \alpha U_{об.} + \beta V_{об.} \end{array} \right.$$

1° Метод Цезаро (метод средних арифметических)

$$S_n \text{ ряда } \sim d_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}, \quad n=1, 2, \dots \quad (2) \quad C_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = S_{\text{ср.}} - \text{обобщенная сумма (по Цезаро) ряда (1).}$$

$$\text{Линейность метода: } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sim U_{\text{ср.}}, \quad U_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad d_n' \sim (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \sim V_{\text{ср.}}, \quad V_n = \sum_{k=1}^n v_k, \quad d_n'' \sim (2)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k), \quad S_n, \quad d_n \sim (2)$$

$$d_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} = \frac{(\alpha U_1 + \beta V_1) + \dots + (\alpha U_n + \beta V_n)}{n} = \alpha d_n' + \beta d_n'' \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$\rightarrow \alpha U_{\text{ср.}} + \beta V_{\text{ср.}}$$

Регулярность метода $\Leftrightarrow$ из леммы о сч-ти посп. ср. арифм.

$$S_n \rightarrow S \xRightarrow{\text{лемма}} d_n \rightarrow S.$$

Расс. ряды с неогр. членами ($\sum 1, \sum k, \sum \frac{1}{k}$) не суммиру. этим методом

Примеры. 1) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1}{2}$ (по Цезаро)

$$S_{2n-1} = 1, \quad S_{2n} = 0 \quad n=1, 2, \dots$$

$$d_n: 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \dots, \frac{n}{2n-1}, \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \dots$$

$$d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = S_{\text{ср.}}$$

2) Фикс $\forall x \in (0, 2\pi)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = -\frac{1}{2} \quad (\text{по Цезаро}).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx = 0/3$$

$$\cos kx \not\rightarrow 0 \quad \forall x \text{ ряд расх-ср.}$$

по Цезаро:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \cos kx \left| \frac{2 \sin \frac{k}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n (\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x) \right.$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left((\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{x}{2}) + (\sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x) + \dots \right) =$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad \begin{matrix} x \in (0, 2\pi) \\ \frac{x}{2} \in (0, \pi) \sin \frac{x}{2} \neq 0 \end{matrix}$$

$$d_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{2n \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n (\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}) = \frac{1}{2n \sin \frac{x}{2}} \cdot$$

$$\sum_{k=1}^n \sin(k+\frac{1}{2})x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4n \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n (\cos kx - \cos(k+1)x) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{4n \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ряд суммируем по Цезаро}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in (0, 2\pi)$$

2. Метод Пуассона - Абеля.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1}, \quad x \in (0, 1) \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$$

Если ряд (3) с.с. $\forall x \in (0, 1)$, то сумма $S(x)$, пусть $\exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S_{\text{сб}}$.

Тогда ряд по-суммируемым методом П-А и число $S_{\text{сб}}$ по-суммируемым (по П-А).

Линейность метода:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = U(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} U_{\text{сб}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} v_k x^{k-1} = V(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} V_{\text{сб}}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) x^{k-1} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} v_k x^{k-1} = \alpha U(x) + \beta V(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} \alpha U_{\text{сб}} + \beta V_{\text{сб}}$$

Регулярность метода.

Если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$, то ряд суммируемым методом П-А и его сумма по П-А $S_{\text{сб}} = S$.

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} \sim_{\forall x \in (0, 1)} S(x)$$

$$2) \exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S$$

$$1) \sum u_k \sim S \Rightarrow u_k = o(1), k \rightarrow \infty \Rightarrow \{u_k\} \text{ - о.р.} \Rightarrow \exists M = \text{const} > 0: |u_k| \leq M \quad \forall k$$

$$\Rightarrow |u_k x^{k-1}| \leq M x^{k-1}, \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$\text{т.к. } \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \sim_{\forall x \in (0, 1)} \frac{1}{1-x} \xrightarrow{T.3} \text{ ряд (3) с.с. (абс.)}, \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$S(x) \text{ - сумма ряда (3), } \forall x \in (0, 1)$$

$$2) S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1}, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S, \quad r_n = S - S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Тогда Абеля: } \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n$$

$$S_0 = 0$$

$$x^{k-1} - x^k = x^{k-1}(1-x)$$

$$v_k = x^{k-1}, \quad n=1, p \rightarrow +\infty$$

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}$$

$$S(x) = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1} \quad (*)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 \quad | \cdot S$$

$$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1} \quad (**) \Rightarrow (**) - (*)$$

$$S - S(x) = (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} z_k x^{k-1}$$

$$z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \cdot \forall k > N \quad |z_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} z_k x^{k-1} \right| \leq (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} |z_k| x^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} x^{k-1} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in (0,1)$$

$$\left| (1-x) \sum_{k=1}^N z_k x^{k-1} \right| \leq (1-x) \sum_{k=1}^N |z_k| x^{k-1} \leq (1-x) \sum_{k=1}^N |z_k| = C(1-x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$C = \text{const} > 0 \quad x > 1 - \frac{\varepsilon}{2C}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 : \forall x \in (1-\delta_0, 1) : (1-x) \sum_{k=1}^N |z_k| x^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta_0 = \frac{\varepsilon}{2C} \left(\frac{\varepsilon}{2C} < 1 \right)$$

$$|S - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow 1-0} (S(x) - S) = 0 \Rightarrow S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} S$$

Примеры:

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$$

допустили брасть удобную степень

$$\Delta \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} = 1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{1+x} = S(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = \frac{1}{2} \text{ (по П.-А.)}$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k = \frac{1}{4} \text{ (по П.-А.)}$$

По П.-А.: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k x^{k-1} \equiv S(x) \quad (R=1, \forall x \in (-1,1) \text{ см. степенные ряды. } \Downarrow)$

$$\Delta \int_0^x S(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \int_0^x t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \cdot \frac{x^k}{k} = x \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} = x \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$$S(x) = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{4}$$

По Чебыреву

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

$$S_n : 1, -1, 2, -2, \dots$$

$$\sigma_n : 1, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{5}, 0, \dots \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}, 0 \right\} \text{ пред. точки}$$

σ_n раск. $\Rightarrow$ не сущ. по Ч.

$$\sum u_k \text{ с.г.е.} - \text{к.с.д.х. } u_k = o(1), k \rightarrow \infty$$

Необходимое условие суммирования ряда и Чебыреву:

$$u_k = o(k), k \rightarrow \infty \quad \left(\frac{u_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \right) \quad \text{док-ть!}$$

$$\frac{u_k}{k} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot k}{k} = (-1)^{k-1} \not\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Delta \forall \{x\} \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow f_n(x) \text{ опред. на } \{x\}$$

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ - маж. функц. посл-тво (ФП)

$$\Delta \text{ ФП } \{u_k(x)\} \text{ опред. на } \{x\}$$

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (1) \text{ маж. функц. ряды (ФР)}$$

$\{x\}$ - обш. опред. ФР

$u_k(x)$ - обш. член ФР

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) - n\text{-ая частичная сумма (1)}$$

§1 Различные виды сх-ты ФП и ФР (в точке, на мн-ве, равномерно).

$$\Delta \text{ ФП } \{f_n(x)\} \text{ на } \{x\}$$

$$\text{фикс. } \forall \text{ т. } x_0 \in \{x\}, \Delta \{f_n(x_0)\}$$

Опр. ФП $\{f_n(x)\}$ сходится в т. x_0 , если сходится числ. посл-ть $\{f_n(x_0)\}$

обозн. через $\{\hat{x}\}$ - мн-во точек, в которых сход. ФП

$\forall x \in \{\hat{x}\}$ - предельное знач.

ФП $f_n(x)$ определяется некоей ф-цией, обозн. $f(x)$

$f(x)$ - маж. предельной функцией ФП $\{f_n(x)\}$

$\{\hat{x}\}$ - область сходимости ФП

$\{\hat{x}\} \subseteq \{x\}$, возможно $\{\hat{x}\} = \emptyset$

ФП сходится на $\{x\}$, если она сходится в каждой точке этого мн-ва.

$$\Delta \text{ ФР } \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (1) \text{ опред. на } \{x\}$$

ФР сход. в т. $x_0 \in \{x\}$ если сход-ся числ. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$

$\{\hat{x}\}$ - область сходимости ФР

$S(x)$ - сумма ФР (1)

$\forall x \in \{\hat{x}\} \rightarrow$ сумма ряда в т. x

ФР сх-ся на $\{x\}$, если он сх-ся $\forall x \in \{x\}$.

Примеры. 1) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1}$, $x \in (0, 1)$, $\{u_k\}$ - с.р. п.с.т., либо $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \text{с.к.с.} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ряд с.к.с. $\forall x \in (0, 1)$, т.е. на $(0, 1)$ (и на $(-1, 1)$).

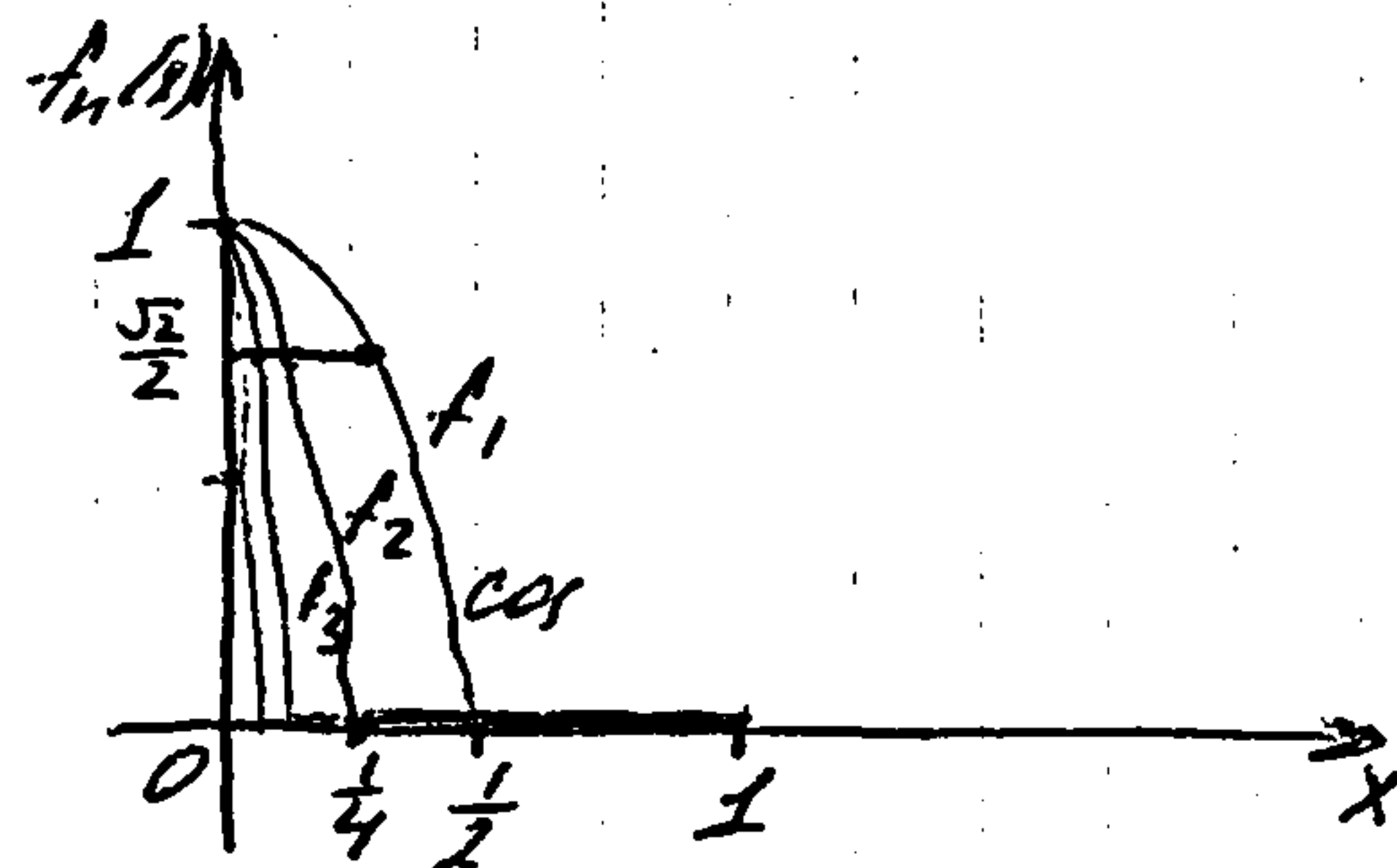
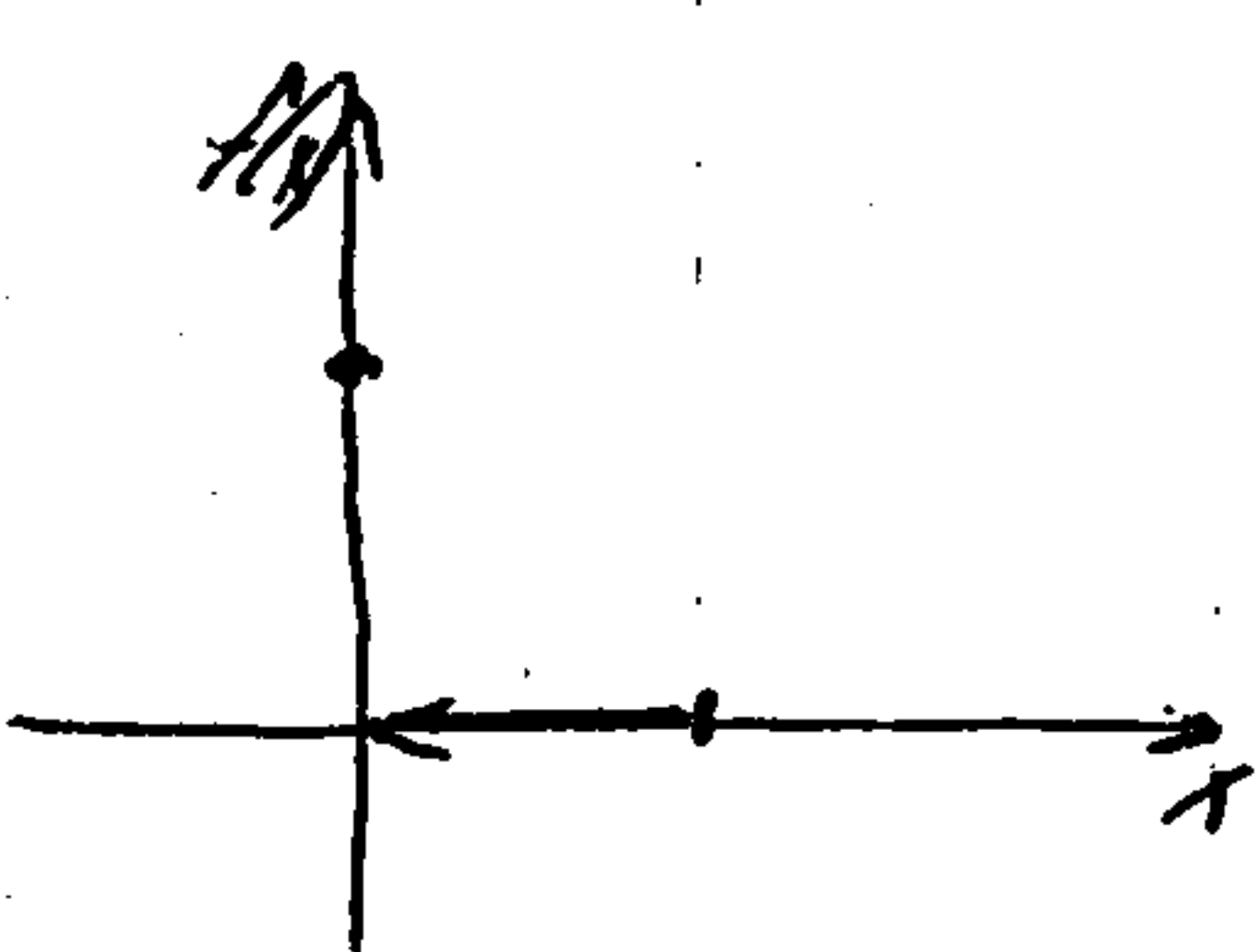
2) ФП $f_n(x) = \begin{cases} \cos \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{2n}, 1] \end{cases} \quad n=1, 2, \dots$

непрер. ф-ции

ФП с.к.с. на $[0, 1]$

$f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases}$

разрыв



3) ФР

$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} (= e^{x+y}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$ с.к.с.

$e^{x+y} = \underbrace{1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+y)^n}{n!}}_{S_n(x, y)} + R_{n+1}(x, y), \quad |R_{n+1}(x, y)| = \left| \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(x+y)} \right|$
 $\leq \frac{|x+y|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x+y|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (x, y) \text{ фикс.}$

$|e^{x+y} - S_n(x, y)| = |R_{n+1}(x, y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ФР с.к.с. на $\mathbb{R}^2$, $S(x, y) = e^{x+y}$

Пусть ФП $\{f_n(x)\}$ с.к.с. на $\{x\}$ к некоторой ф-ции $f(x)$ ($\{x\} = \{x\}$):

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \{x\} \exists N: \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$N(\varepsilon, x)$ $\forall x$ - свой номер N .

Опр. ФП $\{f_n(x)\}$ маж. равномерно сходящаяся на $\{x\}$, если она с.к.с. (т.е. одинаково во всех точках)
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (2)$
 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $\{x\}$ при $n \rightarrow \infty$.
 сразу для всех $x \in \{x\}$
 $N(\varepsilon)$.

Критерий равномерной с.к.т. ФП

$f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $\{x\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \{x\}} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Д-во: $(\Rightarrow) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x \in \{x\} \Rightarrow \sup_{x \in \{x\}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$

$(\Leftarrow) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad \sup_{x \in \{x\}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in \{x\}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, т.е. в.с.с. (2) и $f_n \Rightarrow f$ на $\{x\}$.

из сходимости на лн-ве $\nRightarrow$ равн. ск-ть на этом лн-ве.

Пр. 2. $\{f_n(x)\}$ на $[0, 1]$

1 способ. Д-ть: $f_n(x) \neq f(x) : \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N, \exists x \in \{x\} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

$$\forall n \quad x_n = \frac{1}{4n} \in (0, \frac{1}{2n}), \quad f_n(x_n) = \cos \pi n \cdot \frac{1}{4n} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x_n) = 0, \text{ т.к. } x_n > 0 \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon (\forall \varepsilon \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})) : \forall N, \exists n > N \exists x = x_n = \frac{1}{4n} :$$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{\sqrt{2}}{2} > \varepsilon > 0 \Rightarrow f_n \neq f \text{ на } [0, 1]$$

на $[0, 1]$ тоже $f_n \neq f$.

$$\text{на } [5, 1] \exists N(5) : \forall n > N \quad f_n(x) \equiv 0 \text{ на } [5, 1] \Rightarrow \\ \Rightarrow f_n(x) - f(x) = 0 = 0 \quad (\forall x) \text{, т.е. } f_n \equiv f \text{ на } [5, 1]$$

2 способ. Критерий $\Rightarrow$

$$\sup_{[0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0, 1]} f_n(x) = \sup_{[0, \frac{1}{4n}]} \cos \pi n x = 1, \forall n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0 \Rightarrow f_n \neq f.$$

Δ ФР (1) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), x \in \{x\}$

Опр. ФР (1) ск-е равномерно на $\{x\}$, если ФР его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ ск-е равномерно на $\{x\}$.

$S(x)$ - сумма (1), то $S_n(x) \Rightarrow S(x)$ на $\{x\}$.

Пр. 3. Д-ем, что $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$ ск-е равномерно в $\forall$ круге $B_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$

$$x^2 + y^2 \leq 2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2}, |y| \leq \sqrt{2} \Rightarrow |x+y| \leq 2\sqrt{2}$$

$$|R_{n+1}(x, y)| = \left| \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(x+y)} \right| \leq \frac{|x+y|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x+y|} \leq \frac{(2\sqrt{2})^{n+1}}{(n+1)!} e^{2\sqrt{2}} \rightarrow 0 =$$

$$\Rightarrow S_n(x, y) \Rightarrow e^{x+y} \text{ в } \forall B_2.$$

Теорема 1 (критерий Коши равн. ск-ты ФР)

Для того чтобы ФР $\{f_n(x)\}$ ск-е равномерно на $\{x\}$, $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \text{ и } \forall x \in \{x\} : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (3)$$

Д-во: $(\Rightarrow) \int f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $\{x\}$. Д-ть (3), т.е. $(2) \Rightarrow (3)$.

$$U_2(2): \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall x \in \{x\} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} \quad |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N, \forall x \in \{x\}$$

$$\stackrel{\forall n > N}{\Rightarrow} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in \{x\}$$

⊕ $U_2(3)$ при каждом фикс. $x \in \{x\}$ и кр. Коши для числ. посл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi \Pi \{f_n(x)\}$ сх-ся на $\{x\}$, $f(x)$ - предельная ф-ция этого $\Phi \Pi$.

По усл. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \{x\} \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \rightarrow \infty \quad f_n - \varepsilon/2 < f_{n+p} < f_n + \varepsilon/2$$

$$f_{n+p}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} f(x) \text{ на } \{x\} \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \forall x \in \{x\}, \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow (2)$$

Теорема 1* (кр. Коши для ФР)

Для того чтобы ФР (1) сходилась равн. на $\{x\}$, $\Leftrightarrow$ чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \{x\}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

($\Rightarrow$ из т.1)

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

§2 Признаки равномерной сходимости $\Phi \Pi$ и ФР.

Лекция №9
28.09.10

$$\Delta \text{ ФР } \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ на } \{x\} \quad (1)$$

Теорема 1 (признак Вейерштрасса)

Пусть $\exists$ такой сходящийся числ. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k, \quad c_k \geq 0, \quad |u_k(x)| \leq c_k \quad \forall k, \forall x \in \{x\}$$

Тогда ряд (1) сх-ся равномерно на $\{x\}$

Д-во: по кр. Коши для числ. рядов (т.1, 2.1.1)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \{x\}:$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \quad \stackrel{\text{т.1}^*}{\Rightarrow} \text{ряд (1)} \Rightarrow \text{на } \{x\}$$

Дирхле П.

1805-1859

р. Германия, Эльф. Фр.

1822-27 гг. учился в

обл. с Фурье

1854 г. Геттингенский ун-т.

„типичных формул
придавал тем силам
(многозначным)“

Пр. 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^3 x^2 + k^2 xy + k)}{k^{1,001}}$

$C_k = \frac{1}{k^{1,001}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_k < \infty \Rightarrow \text{ряд} \Rightarrow \text{в } \mathbb{R}^3$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \frac{|\sin kx|}{k} \leq \frac{kx}{k} = x - \text{расх.} \quad \nRightarrow \text{равн. не сх.}$

Признак Лейбница лишь достаточный - не явл. необход.

1. $\forall$ чл. сх-го числ. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \Rightarrow$ на $\forall$ чл-е

Мажорировать можно $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ - расх-е.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \ln(1+x)$

сх. чл. $\forall x \in (-1, 1)$

$|S_n(x) - \ln(1+x)| = |R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ряд} \Rightarrow$
 $\forall x \in (-1, 1)$

$\sup_{(-1,1)} \left| \frac{(-1)^k x^k}{k} \right| = \frac{1}{k} - \text{расх.} \quad \text{нельзя судить сверху через сх-е ряд.}$

Опр. ФП $\{f_n(x)\}$ наз. равномерно ограниченной на $\{x\}$ если

$\exists M = \text{const} > 0 : |f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in \{x\}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$

числ. посл. $a_n \rightarrow a \Rightarrow \{a_n\}$ - о.р.

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ на $\{x\} \Rightarrow \{f_n(x)\}, \forall x$ - о.р.

$f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $\{x\} \stackrel{?}{\Rightarrow} \{f_n(x)\}$ - равн. о.р. - нет

$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1] \quad f_n(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x}, \quad \{f_n(x)\}$ не явл. равн. о.р.

Опр. ФП $\{f_n(x)\}$ наз. монотонной на $\{x\}$ если

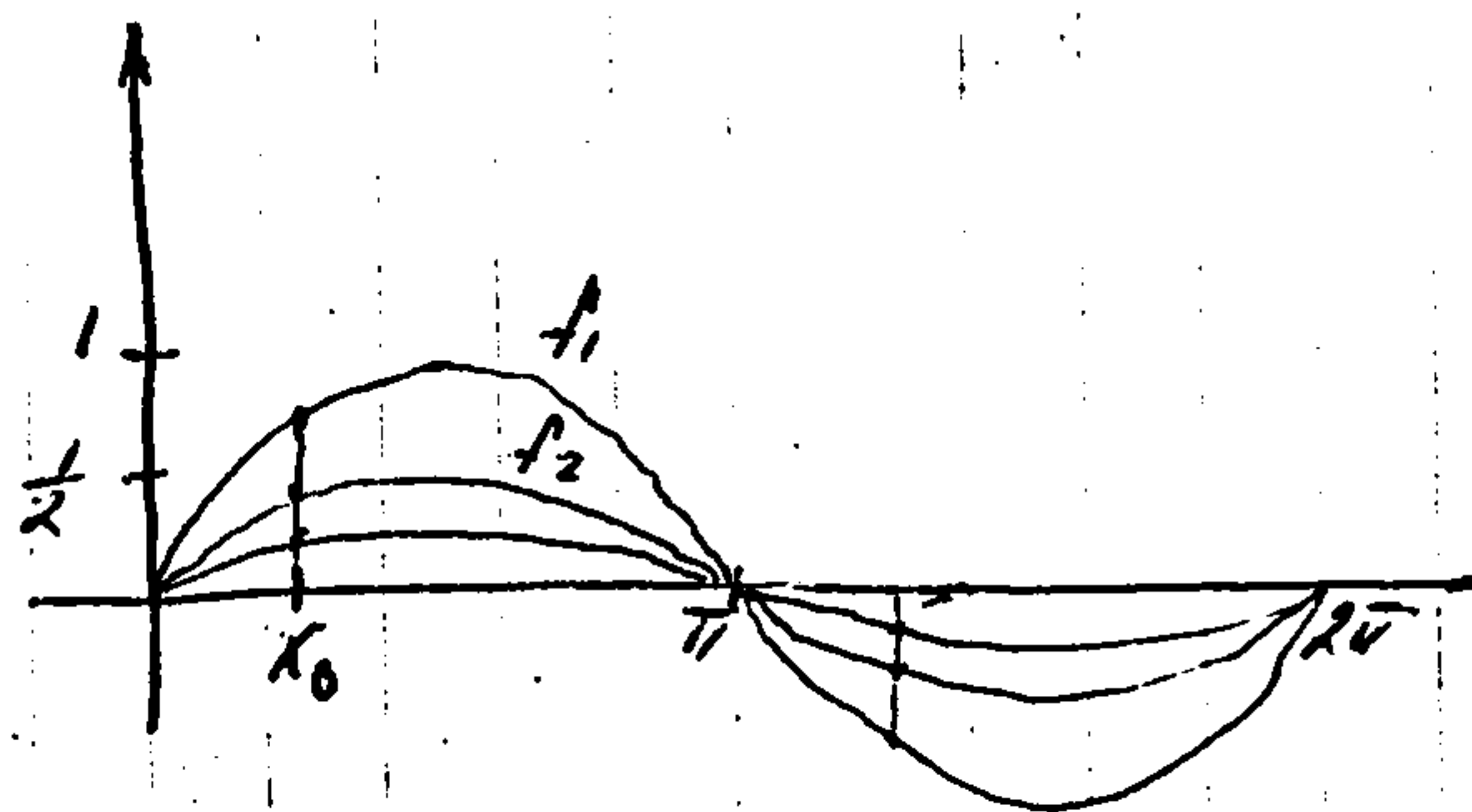
$\forall x_0 \in \{x\}$ числ. посл. $\{f_n(x_0)\}$ явл. монотон. или $\forall x_0 \in \{x\}, \{f_n(x_0)\}$ явл. неубыв.

При этом каждая ф-ция $f_n(x)$ не обязана быть монот. на $\{x\}$

Пр. $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}, \quad x \in [0, \pi]$

монот. на $[0, \pi]$

не монот. на $[0, 2\pi]$



Опр. ФП $\{z_n(x)\}$ наз. посл. с равномерно сходящимися членами на $\{X\}$, если

$$\text{ФР } \sum_{k=1}^{\infty} |z_{k+1}(x) - z_k(x)| \quad (2) \quad \text{сх. равн. на } \{X\}.$$

Замеч. Из равн. сх-ти (2) $\nRightarrow$ равн. сгр-ть посл.-ти $\{S_n(x)\}$ на $\{X\}$.

Упр. 1 Каждая ФП с равном. сгр. сум. на $\{X\}$ сх-ся равном. на этом мн-ве.

Док-во. 1) Из равн. сх-ти ряда (2) на $\{X\} \Rightarrow$ равн. сх-ть на $\{X\}$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_{k+1}(x) - z_k(x)) \quad \text{по Т.1}^*$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in \{X\}:$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+r} (z_{k+1}(x) - z_k(x)) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+r} |z_{k+1} - z_k| \stackrel{\text{Т.1}^*}{< \varepsilon} \Rightarrow$$

$$\stackrel{\text{Т.1}^*}{\Rightarrow} \text{ряд сгр. равномерно сх. равн. на } \{X\} \Rightarrow$$

$$2) \Rightarrow S_n(x) = \sum_{k=1}^n (z_{k+1}(x) - z_k(x)) \Rightarrow S(x) \text{ на } \{X\}$$

$$S_n(x) = (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \dots + (z_{n+1} - z_n) = z_{n+1} - z_1 \Rightarrow S(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} S(x) + z_1(x) \text{ на } \{X\}$$

$\{f_n(x)\}$ имеет на $\{X\}$ и равн. сгр. $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ ФП имеет равн. сгр. сум.

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos \pi n x, & [0, \frac{1}{2n}] \\ 0, & (\frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$$

небод. ФП

равн. сгр. 1

$f_n \not\rightarrow f$ на $[0, 1]$

Упр. 2 Всякая имеет на $\{X\}$ ФП $\{z_n(x)\}$ равн. сх-ся на этом мн-ве имеет равн. сгр. суммирование на $\{X\}$

$$\text{Д-во: } z_n(x) \Rightarrow z(x) \text{ на } \{X\}$$

$$\{z_n(x)\} \text{ имеет на } \{X\} \Rightarrow S_n(x) = \sum_{k=1}^n |z_{k+1}(x) - z_k(x)| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n (z_{k+1}(x) - z_k(x)) \right| = |z_{n+1}(x) - z_1(x)| \underset{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} |z(x) - z_1(x)| \text{ на } \{X\}$$

Теорема 3 (два признака Абеля)

$$\Delta \text{ ФР } \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) z_k(x) \quad (3)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

I. II 1) ФП $\{S_n(x)\}$ явл. равн. сгр. на $\{X\}$

2) $\{z_n(x)\}$ имеет равн. сгр. на $\{X\}$ и сумм. и сгр. к 0 на $\{X\}$ $\Rightarrow$ (3) сх. равн. на $\{X\}$.

- II. 1) $\exists \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ с.р. равн. на } \{X\} \Rightarrow$
 2) $\{z_n(x)\}$ имеет равн. с.р. угнет. на $\{X\}$ и абс. равн. с.р. на $\{X\}$
 $\Rightarrow$ ряд (3) с.р. равн. на $\{X\}$.

Док-во: I. $\exists M = \text{const} > 0 : |S_n(x)| < M, \forall n, \forall x \in \{X\}$

$\{z_n(x)\}$ - равн. с.р. угнет. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \{X\}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k^0 - z_{k+1}^0| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

$$z_n(x) \xrightarrow{\text{с.р.}} 0 \Rightarrow \exists N' : \forall n > N' |z_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \forall x \in \{X\}$$

$\forall n > N'(1), \forall p$

$$u_k = S_k - S_{k-1}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) z_k^0(x) \right| \stackrel{\text{т. Аб.}}{=} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x) (z_k^0 - z_{k+1}^0(x)) + S_{n+p} z_{n+p}^0 - \right.$$

$$\left. - S_n z_{n+1}^0 \right| \leq M \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k^0(x) - z_{k+1}^0(x)| + |z_{n+p}^0(x)| + \right.$$

$$\left. + |z_{n+1}^0(x)| \right) < M \left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} \right) = \varepsilon, \forall x \in \{X\} \Rightarrow$$

$\stackrel{\text{т.1}^*}{\Rightarrow} (3) \text{ с.р. равн. на } \{X\}.$

II. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с.р. равн. на $\{X\} \stackrel{\text{т.1}^*}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0, \varepsilon = 1 \exists N' : \forall n > N'$

$$|\hat{S}_n(x)| = \left| \sum_{k=N}^n u_k(x) \right| < 1, \forall x \in \{X\}$$

В том же Абеле $n > N', S_n \sim \hat{S}_n$

$$\sum u_k \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N' : \forall n > N', \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \{X\} |\hat{S}_{n+p} - \hat{S}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$z_n^0(x) - \text{равн. с.р. на } \{X\} \Rightarrow \exists M > 0 : |z_n^0(x)| < M, \forall n, \forall x \in \{X\}$$

$\{z_n^0\}$ - равн. с.р. угнет. $\Rightarrow \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \{X\}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k^0 - z_{k+1}^0| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$z_n^0(x) \xrightarrow{\text{с.р.}} z(x) \text{ на } \{X\} \Rightarrow \forall n > N', \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \{X\} :$$

$$|z_{n+p}^0(x) - z_{n+1}^0(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall n > N', \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k z_k^0 \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \hat{S}_k (z_k^0 - z_{k+1}^0) + \hat{S}_{n+p} z_{n+p}^0 - \right.$$

$$\left. - \hat{S}_n z_{n+1}^0 \right| \leq 1 \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k^0 - z_{k+1}^0| + \left| \hat{S}_{n+p} z_{n+p}^0 - \hat{S}_n z_{n+1}^0 \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \left| \hat{S}_{n+p} (z_{n+p}^0 - z_{n+1}^0) + z_{n+1}^0 (\hat{S}_{n+p} - \hat{S}_n) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} +$$

$$|\hat{S}_k| \leq 1, |z_k^0| \leq M$$

$$+ 1 \cdot |z_{n+p}^0 - z_{n+1}^0| + M |\hat{S}_{n+p} - \hat{S}_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon \quad \forall x \in \{X\} \Rightarrow$$

$\stackrel{\text{т.1}^*}{\Rightarrow} \text{ ряд (3) с.р. равн. на } \{X\}$

Самост. 3^{ий} пр. Абеле : 1) $\sum u_k(x)$ - с.к. равн. на $\{x\}$
 2) $\{v_k(x)\}$ - монот. ФП, равн. с.р. на $\{x\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ (3) с.к. равн. на $\{x\}$.

Теорема 4 (признак Дирихле-Абеле)

Пусть (3). Пусть

1) $\{S_n(x)\}$ част. суммы $\sum u_k$ - равн. с.р. на $\{x\}$
 2) $\{v_k(x)\}$ монот. не возр. на $\{x\}$ и рех-ся к 0 $\Rightarrow$ (3) р.с.с. на $\{x\}$.

До-во: 1) совн. с 1) в 7.3 I
 2) по утв. 2 $\{v_k(x)\}$ имеет равн. с.р. сум. на $\{x\} \xrightarrow{7.3 I} (3) \Rightarrow$

Лекция №10
 4.10.10

Теорема 5 (признак Дини)

ФП $\{f_n(x)\}$ на $\{x\}$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ на $\{x\}$

Пусть 1) $\{x\}$ - компактное (с.р. и замкнутое)

2) $\{f_n(x)\}$ - монотонна на $\{x\}$

3) $f_n(x)$ непрер. на $\{x\} \forall n=1,2,\dots$

4) $f(x)$ непрер. на $\{x\}$

Тогда $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ на $\{x\}$.

До-во: Пусть $\{f_n(x)\}$ не убывает на $\{x\}$

Δ ФП $z_n(x) = f(x) - f_n(x)$

z_n : $z_n \geq 0$ на $\{x\}$, $z_n(x)$ - непрер. на $\{x\} \forall n$

$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ на $\{x\}$, $\{z_n(x)\}$ не возр. на $\{x\}$.

До-ам, что $z_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ на $\{x\} (\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x))$

! Дост. дока-ть, что $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : z_{n_0}(x) < \varepsilon, \forall x \in \{x\}$. $\{z_{n_0}(x)\}$ - не возр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq z_n(x) \leq z_{n_0}(x) < \varepsilon \quad \forall x \in \{x\} \Rightarrow z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

III $\exists \varepsilon > 0 \forall n$ неверно пер-во $z_n(x) < \varepsilon$ сразу для всех $x \in \{x\}$ т.е. $\exists \{x_n\} \in \{x\} : z_n(x_n) \geq \varepsilon$ (4)

$\exists \varepsilon > 0 \forall n \exists x_n \in \{x\} : z_n(x_n) \geq \varepsilon$ (4)

Т.к. $\{x\}$ - окр., то из попп. $\{x_n\}$ можно выделить след. подпоп. (т.5-B)

$$\exists x_{n_k} \in \{x_n\} : x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} x_0$$

Т.к. $\{x\}$ - замкнуто, то $x_0 \in \{x\}$.

$$\text{Т.к. } z_n(x) \text{ непрер. на } \{x\} \forall n, \text{ то } \forall \ell \in \mathbb{N} \quad z_\ell(x_{n_k}) \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} z_\ell(x_0) \quad (5)$$

Фикс. $\forall \ell, \exists n_k > \ell$

$$\triangle z_\ell(x_{n_k}) \geq z_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon, \quad \forall n_k > \ell \quad \Rightarrow z_\ell(x_{n_k}) \geq \varepsilon, \quad n_k > \ell$$

$\{z_\ell\}$ - неверн. (4)

$$n_k \rightarrow \infty \text{ из (5): } z_\ell(x_0) \geq \varepsilon \quad \forall \ell \Rightarrow z_\ell(x_0) \not\xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0 \quad ?!$$

Пример. 1) $\{x^n\}, x \in [0, \frac{1}{2}]$
 $\downarrow, f(x) \equiv 0 \xrightarrow{\text{т.5}} x^n \rightarrow 0 \text{ на } \{x\}$

Замечание. Если сбросить хотя бы одно из 4-х усл. т.5, то упр. в общем случае будет неверно.

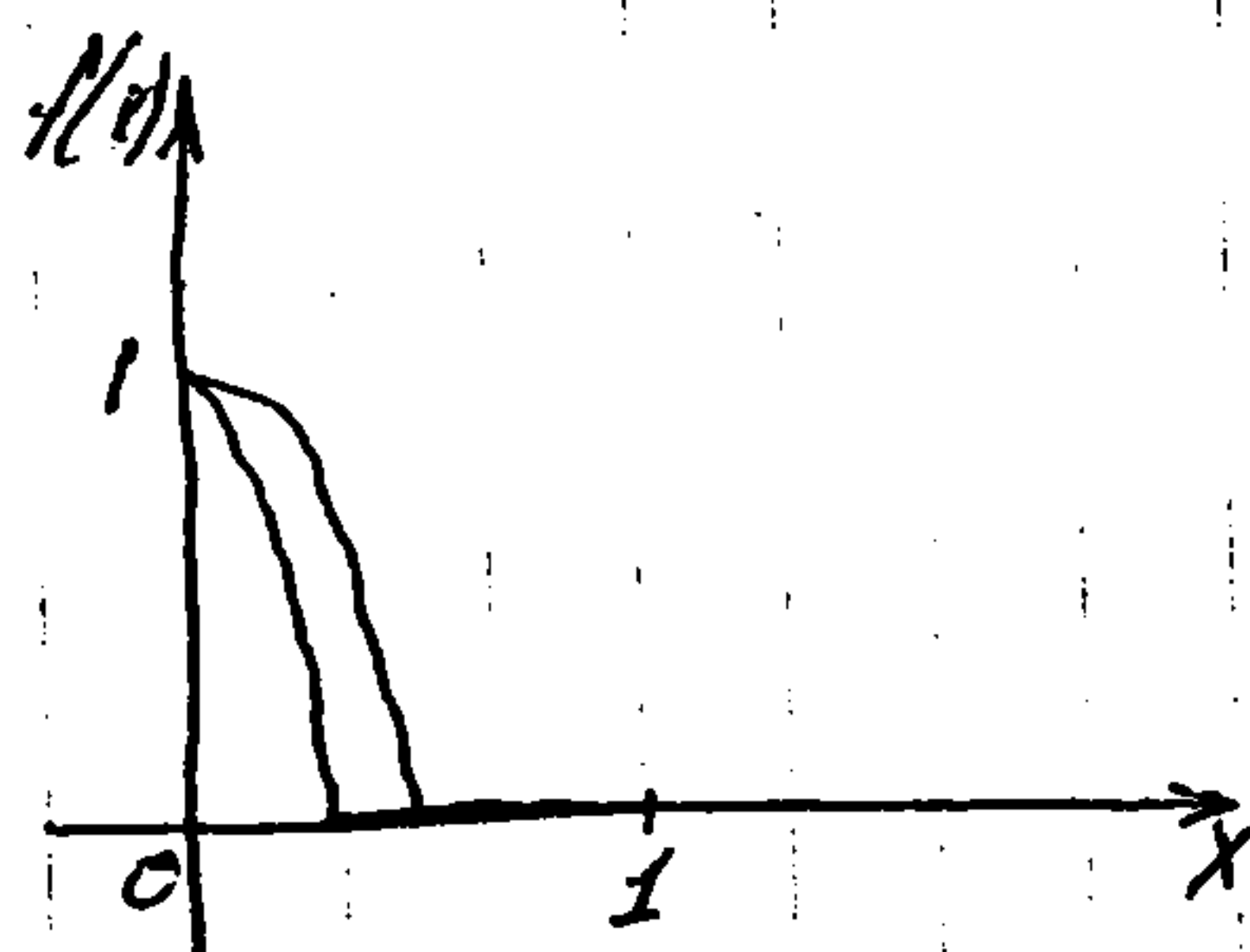
Дал-во: $\cancel{1}, 2, 3, 4$

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos \pi n x, & x \in (0, \frac{1}{2n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$$

$$\{x\} = (0, 1], f(x) \equiv 0$$

$\downarrow$, непрер. f_n, f

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| = 1 \Rightarrow f_n \rightarrow f, \text{ но } f_n \neq f$$



$\cancel{1}, \cancel{3}, 4$

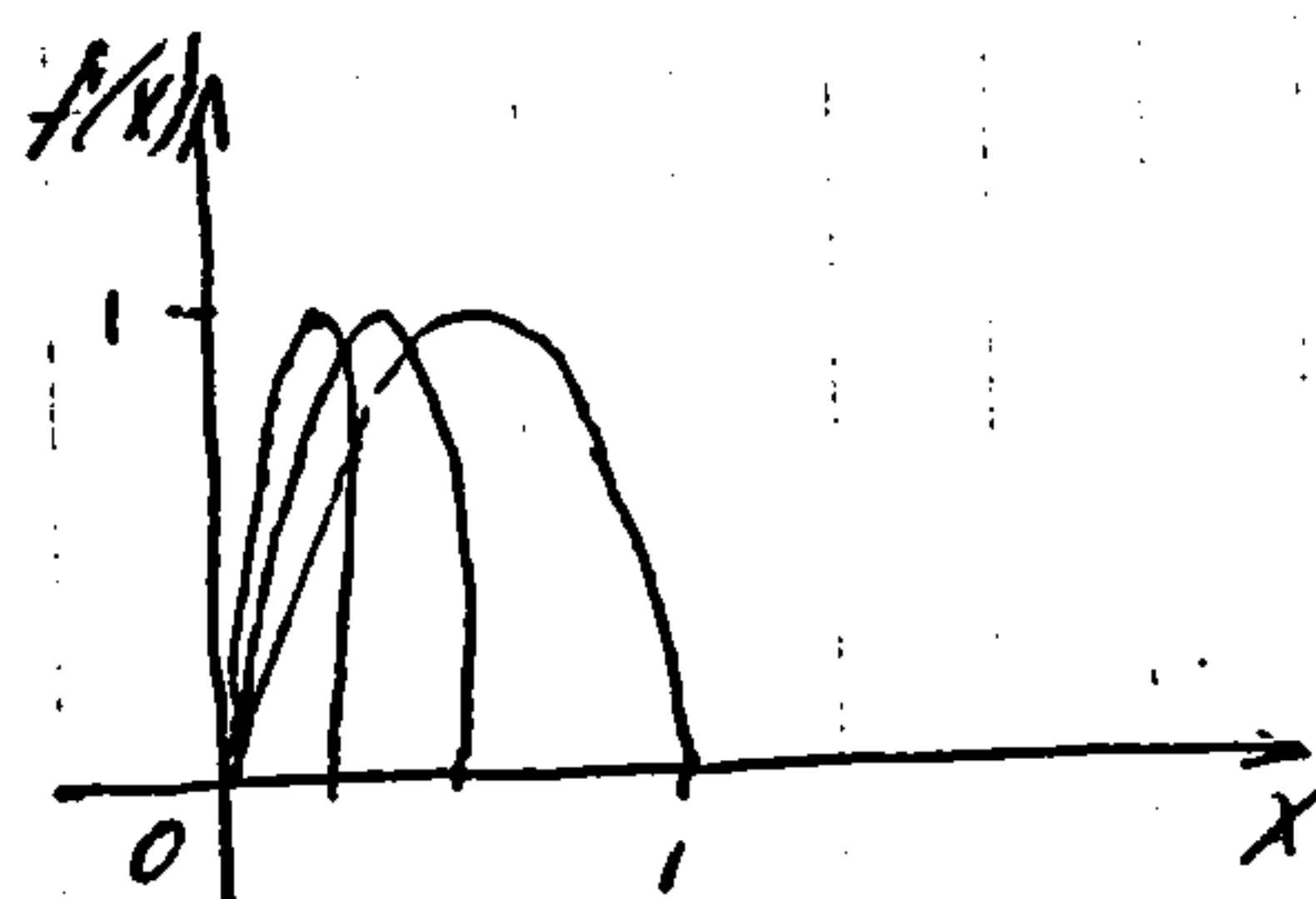
$$f_n(x) = \begin{cases} \sin \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$f(x) \equiv 0, \{x\} = [0, 1]$$

непрер. $\{f_n(x)\}$

f_n, f - непрер.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| = 1 \neq 0 \Rightarrow f_n \not\rightarrow 0$$

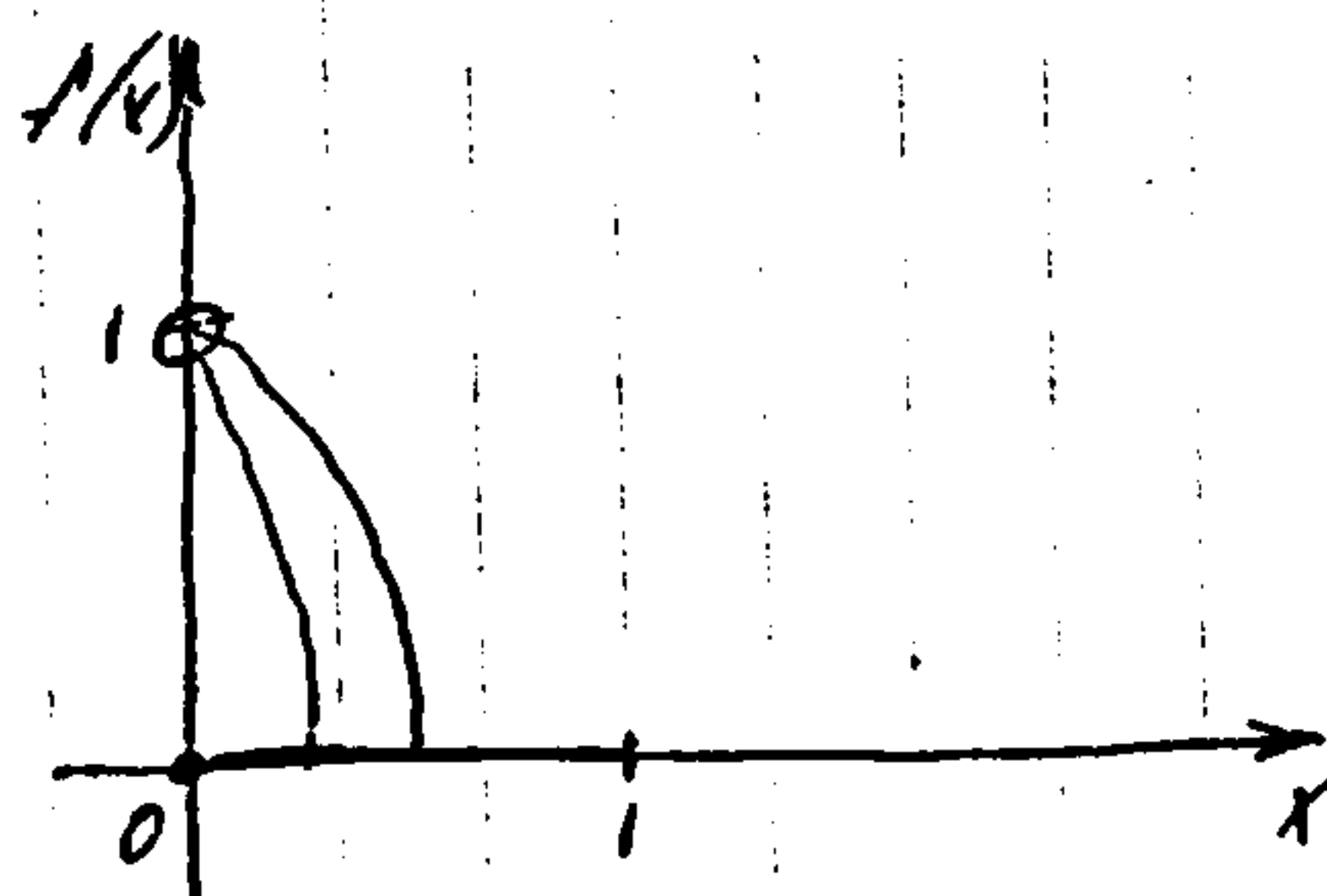


$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, 4$

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos \pi n x, & x \in (0, \frac{1}{2n}] \\ 0, & x=0, x \in (\frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$$

$$f(x) \equiv 0, \{x\} = [0, 1]$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| = 1 \neq 0 \Rightarrow f_n \not\rightarrow 0 \text{ на } [0, 1]$$



1, 2, 3, 4

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n - f| = 1 \neq 0 \Rightarrow f_n \not\rightarrow f \text{ на } [0,1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \in (0,1], \end{cases} \quad \{x\} = [0,1]$$

Самост. Пр. 1, 3, 4 $f_n(x) = x^n$ $\{x\} = [0,1], [0,1)$

Теорема 5* (признак Дирихле)

$$\Delta \text{ ФР (I)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ на } \{x\}$$

$S(x)$ - сумма ряда (I) на $\{x\}$

Пусть 1) $\{x\}$ - компакт

$$2) u_k(x) \geq 0 \quad \forall k, \forall x \in \{x\} \quad (\Rightarrow \{S_n(x)\} \nearrow)$$

$$3) u_k(x) \text{ непрерывна на } \{x\} \quad \forall k$$

$$4) S(x) \text{ - непрерывна на } \{x\}$$

Тогда ряд (I) с.с.с. равен $S(x)$ на $\{x\}$

(для ФР $\{S_n(x)\}$ вып. все усл. Т.5)

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k, x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$S(x) = \frac{1}{1-x} \text{ - непрерывна на } [0, \frac{1}{2}] \xRightarrow{\text{Т.5}^*} \text{ ряд с.с.с. равен на } [0, \frac{1}{2}]$$

§3. Функциональные свойства суммы ФР и предельной р-ции ФР

Пример. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{x^k}{1+x^k} \right) \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\frac{x^k}{1+x^k} \right) \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{\ln 2}{2} = \ln \sqrt{2}$

$S(x) = ?$ мон. и стр. III пр. Аб.

1. Непрерывность.

$\Delta \{x\} \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$, т.а - пред. точка $\{x\}$ (т.а не обязана принадлежать $\{x\}$)
 $(0,1) - \text{т.а} = 0$

Теорема 6.

$$\Delta \text{ ФР } \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ на } (x) \quad (1)$$

Γ ряд (I) с.с.с. равномерно на $\{x\}$
 $S(x)$ - его сумма

$$\Gamma \exists \lim_{x \rightarrow a} u_k(x) = v_k, \quad \forall k=1, 2, \dots$$

Тогда $S(x)$ имеет предел в т.а. и возможен постр. переход к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (1)$$

(по группам: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} S_n(x)$).

Д-во: в примере, $u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Rightarrow$ на (0,1)

$$v_k = \frac{x^k}{1+x^k} = 1 - \frac{1}{1+x^k} \text{ монот. стр. } \uparrow \quad \left| \begin{array}{l} \text{III} \text{ по Аб.} \\ \Rightarrow \text{ряд с.р. равен} \\ \text{на (0,1)} \end{array} \right.$$

1) Док-ем с-ть ун. ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Ряд (1) с-е равн. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \{x\}:$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$x \rightarrow a$

$$\text{Можно выбрать } x_p \rightarrow a, x_p \in \{x\} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$\xRightarrow{\text{Т.1 ун.}} \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ с-е равн.}$

2) Д-ем, что $\exists \lim_{x \rightarrow a} S(x)$ и справ. (2), т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \{x\}, 0 < |x-a| < \delta \quad \left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon$$

Факт $\forall \varepsilon > 0$.

Ряд (1) с-е равн., а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ с-е равн. $\Rightarrow$ сходимость рядов мажор.

$$\exists N: \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^N (u_k(x) - b_k) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k \right| < \sum_{k=1}^N |u_k(x) - b_k| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3} \varepsilon + \\ &\quad + \sum_{k=1}^N |u_k(x) - b_k|, \quad \forall x \in \{x\} \end{aligned}$$

т.к. $u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_k$ $\exists \delta > 0: \forall x \in \{x\}, 0 < |x-a| < \delta:$

$$|u_k(x) - b_k| < \frac{\varepsilon}{3N}, \quad k=1, 2, \dots, N \quad \forall k \rightarrow b_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| < \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3N} \sum_{k=1}^N 1 = \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3N} \cdot N = \varepsilon$$

Замечание. Вместо $x \rightarrow a$ можно $x \rightarrow a+0, x \rightarrow a-0$.

Теорема 6*

 $\Delta \Phi 17 \quad \{f_n(x)\}$ на $\{x\}$, т.а - прер. точка $\{x\}$

$$\int f_n(x) \Rightarrow f(x) \text{ на } \{x\}$$

$$\int \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \quad \forall n$$

$$\text{Тогда } \int \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x). \quad (3)$$

($\Rightarrow$ из т.б, если заменить т.б в терминах $\{S_n(x)\}$).

Замечание

От условия $\Rightarrow$ аналогичные условия в т.б, т.б*.

$$\text{Пр. } f_n(x) = \begin{cases} \cos \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ на } [0, 1], \text{ но } f_n(x) \neq f(x) \text{ на } [0, 1]$$

$$\int \lim_{x \rightarrow 0+0} f_n(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 0 \neq 1$$

(3) нарушается.

$$\text{т.а} \in \{x\}, u_k(x) \text{ прер. в т.а} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = S(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) \text{ прер. в т.а} \Rightarrow \text{справедлива}$$

Теорема 7

Пусть $\{x\}$ - множество в себе или-во (каждая его точка - предельная)
 $\Phi 17(\Phi P)$ с.с. равн. на $\{x\}$
 $\forall f_n(x) (u_k(x))$ прер. на $\{x\}$

Тогда $f(x) (S(x))$ прер. на $\{x\}$.

Замечание

$\Rightarrow$ убрать условие
 с.с. прер. пр.

2° Интегрируемость

$$\{x\} = [a, b]$$

Лекция N 11
6.10.10

Теорема 8.

Пусть $\{f_n(x)\}$ скор. равн. на $[a, b]$ к $f(x)$
 $\forall f_n(x)$ интегрируема на $[a, b]$

Тогда $f(x)$ интегр. на $[a, b]$ и возможно почленное интегрирование посл-ти:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

$$f(x) \in L[a, b]$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x), f_n \in L[a, b] \quad \forall n \Rightarrow f \in L[a, b] \text{ и } (4)$$

До-во: 1) $\int f(x)$ и-е на $[a, b]$, док-им справедем. ф-лы (4):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| < \varepsilon$$

Т.к. $f_n \rightarrow f$ на $[a, b]$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f - f_n] dx \right| \leq \int_a^b |f - f_n| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b 1 dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

2) До-им, что $f(x)$ интегрируемо на $[a, b]$

Используем критерий интегр. $S - s < \varepsilon$, если f - ор.

До-им, что $f(x)$ ор. на $[a, b]$. Из $f_n \rightarrow f$

$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon = 1, \exists N: |f_N(x) - f(x)| < 1, f_N(x)$ - и-е на $[a, b]$ по ф-ле $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_N(x)$ ор., т.е. $\exists M_0: |f_N(x)| \leq M_0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$f_N(x) - 1 < f(x) < f_N(x) + 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f_N(x)| + 1 \leq M_0 + 1 = M \quad \forall x \in [a, b]$$

Воспользуемся критерием интегр.:

Разбиваем $[a, b]$ на конечное число частей точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_r = b$$

$$\Delta S \text{ и } \Delta s$$

$$\text{Обозн. } \omega_k(f) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad - \text{колебание } f(x) \text{ на } [x_{k-1}, x_k]$$

$$\text{Аналогично } \omega_k(f_n)$$

$$S - s = \sum_{k=1}^r \omega_k(f) \Delta x_k$$

$$\text{Док-им, что } \forall \varepsilon > 0 \exists N: \omega_k(f) \leq \omega_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{r(b-a)} \quad (5) \quad \forall k = \overline{1, r}$$

$$\Delta \quad \forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f_N(x')| + |f(x'') - f_N(x'')| + \\ &+ |f_N(x') - f_N(x'')| \end{aligned}$$

Фикс $\forall \varepsilon > 0$, т.к. $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists N: |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + |f_n(x') - f_n(x'')| = |f_n(x') - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq \omega_n(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Итак $\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]: |f(x') - f(x'')| \leq \omega_n(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$x' \sim x_p' : f(x_p') \rightarrow \sup_{p \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

$$x'' \sim x_p'' : f(x_p'') \rightarrow \inf_{p \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

$$\Rightarrow \omega_k(f) \leq \omega_n(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Умножаем обе части (5) на $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\sum_{k=1}^l$

$$S' - S \leq S_n - S_n + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^l \Delta x_k = S_n - S_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

т.к. f_n - и.к. на $[a, b]$, то $\exists$ разд. T отрезка $[a, b]$:

$$S_n - S_n < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow S' - S < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \exists T. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ и.к.-ма на } [a, b]$$

Замечание

Если предположить, что $f(x)$ и.к.-ма на $[a, b]$, то вышесб $\Rightarrow$ можно б "сх-ть в среднем".

3°. Дифференцируемость.

Теорема 8*. Пусть ФР (1) $\sum_{k=1}^{\infty}$ сх-ся равн. на $[a, b]$, $S(x)$ его сум.

$$u_k(x) \text{ и.к.-ма на } [a, b] \quad \forall k$$

Тогда $S'(x)$ - и.к.-ма на $[a, b]$ и возможно почленно и.к. ФР

$$\int_a^b S'(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

(ФП $\{S_n(x)\}$ удовл. ум. Т.8 $\Rightarrow$ Т.8* средние Т.8).

Δ ФП $\{f_n(x)\}$ на $[a, b]$ (аналогично на (a, b)).

Теорема 9.

Пусть $\forall n$ $f_n(x)$ диффер. на $[a, b]$ (в т.ч. в-диффер. и

$\{f_n'(x)\}$ сх-ся равн. на $[a, b]$

$\exists x_0 \in [a, b]: \{f_n(x_0)\}$ сх-ся.

Тогда $\{f_n(x)\}$ сх-ся равном. на $[a, b]$, $f(x)$ - пред. ф-ция $f(x)$ - диффер. на $[a, b]$

и возможно почленное дифференцирование ФТ:

$$\exists f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (6)$$

$$f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'$$

Док-во: 1) Д-м, что $\{f_n\}$ ск. равн. на $[a, b]$
Используем кр. Коши $\Rightarrow$ ФТ.

$$\begin{aligned} f_{n+p}(x) - f_n(x) &= (f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0)) + \\ &\quad + (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)) \stackrel{7.1}{=} f_{n+p}'(\xi)(x-x_0) - f_n'(\tilde{\xi})(x-x_0) + \\ &\quad + (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)) = (f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\tilde{\xi}))(x-x_0) + \\ &\quad + (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)) \end{aligned}$$

неправильно $\xi, \tilde{\xi}$

Δ Вспомогательную ф-цию $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$F_{np}(x) = f_{n+p}(x) - f_n(x)$$

Далее F_{np} на $[a, b]$ справедлива ф-ла Лагранжа:

$$\forall x \neq x_0: F_{np}(x) - F_{np}(x_0) = F_{np}'(\xi)(x-x_0)$$

$$F_{np}(x) = F_{np}'(\xi)(x-x_0) + F_{np}(x_0)$$

$$f_{n+p}(x) - f_n(x) = (f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\tilde{\xi}))(x-x_0) + (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))$$

Т.к. $\{f_n'(x)\}$ ск.-ср. равн. на $[a, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b] \quad |f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\{f_n(x_0)\} \text{ ск.-ср.} \Rightarrow \exists N: \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \quad |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b] \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x-x_0| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \\ &\text{т.е. по Т.1 } \{f_n(x)\} \text{ ск. равн.} \end{aligned}$$

Обозн. $f'(x)$ - пред. ф-ция $\{f_n'(x)\}$ на $[a, b]$

2) Док-м, что $f'(x)$ диф. на $[a, b]$ и справедл. ф-ла (6).

$$\text{Фикс } \forall \tau, x \in (a, b) \quad \forall \delta > 0: (x-\delta, x+\delta) \subseteq [a, b]$$

$$\{ \Delta x \}: 0 < |\Delta x| < \delta$$

$$\text{Д-тб: } \exists \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x \in \{ \Delta x \}}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x \in \{ \Delta x \}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \stackrel{7.6}{=} \dots$$

и по Т.6

$$? = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \exists f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \text{т.е.}$$

$$\text{обозн. } \varphi(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x}$$

Д-то, что $\{ \varphi_n(x) \}$ с.р. равна на $\{ \Delta x \}$, $n \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\Delta x) \stackrel{\text{т.б.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi_n(\Delta x) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

Используем пр. Коши $\Rightarrow \Phi D$

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \quad \varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x) = \frac{f_{n+p}(x+\Delta x) - f_{n+p}(x)}{\Delta x} - \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} ([f_{n+p}(x+\Delta x) - f_n(x+\Delta x)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]) = \frac{F_{n+p}(x+\Delta x) - F_{n+p}(x)}{\Delta x} =$$

$$\stackrel{\text{р-но Л.}}{=} \frac{F'_{n+p}(\xi) \Delta x}{\Delta x} = F'_{n+p}(\xi) = f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi), \quad \xi \text{ - между } x \text{ и } x+\Delta x$$

т.к. $\{ f'_n(x) \}$ с.р. равн. на $[a, b]$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b] \quad |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\stackrel{\text{т.б.}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} |\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x)| < \varepsilon \quad \forall \Delta x \in \{ \Delta x \} \Rightarrow \{ \varphi_n(\Delta x) \} \text{ с.р. равн. на } \{ \Delta x \}$$

т. $\Delta x = 0$ - лев. пред. для $\{ \Delta x \} \Rightarrow$ применима т.б.*

$$a: \{ \Delta x \}: 0 < \Delta x < \delta$$

$$b: \{ \Delta x \}: -\delta < \Delta x < 0$$

$$f'_n \text{ - мер. } \stackrel{\text{т.б.}}{\Rightarrow} f'(x) \text{ - мер.}$$

Замечание.

св-ва мер. и диф-ти экв. локальными св-вами.

Ньютоном
1643-1727

$$\int f(x) dx$$

Лейбниц
1646-1716

$$1684 \quad dx, dy$$

$$\int dy = y \quad \text{omn. } \ell = y$$

$$\int - \int \quad \text{omn. } a$$

$$dy \sim \ell$$

16902. суммирование м. измер.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Пр. $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, x > 1$

Дзета-функция Римана
($x \neq 2 \in \mathbb{C}$)

Лемма N12
11.10.10

Д-то, что $\zeta(x) \in C^{\infty}(1, +\infty)$

$x \in (1, +\infty), x \in (1, x_0) \forall x_0 > 1 \quad \neq, \text{ т.к. } \zeta(1) = +\infty.$

Д-ли непрерыв. и диф-ть в произв. точке $x_0 \in (1, +\infty)$

$\exists a, b: 1 < a < x_0 < b < +\infty$

Δ раз на $[a, b]$

На $[a, b]$ $k^x \geq k^a, 0 < \frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{k^a}, \forall x \in [a, b]$

$a > 1$, то раз $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ - сходя. $\Rightarrow$ раз с.с. равн. на $[a, b] \Rightarrow$

$\stackrel{\text{т.7}}{\Rightarrow} \zeta(x) \in C[a, b] \Rightarrow \forall x_0, a \text{ т.к. } x_0 \in (1, +\infty) \Rightarrow \zeta(x) \in C(1, +\infty)$

Диф-ть: $(k^x)' = k^x \ln k$

$\left(\frac{1}{k^x}\right)' = -\frac{k^x \ln k}{k^{2x}} = -\frac{\ln k}{k^x} \text{ на } (1, x_0) \neq$

Фикс. $\forall x \in (1, +\infty), \exists a, b: 1 < a < x_0 < b$, применим т.9* на $[a, b]$

На $[a, b]$ $\frac{\ln k}{k^x} \leq \frac{\ln k}{k^a}$, раз $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^a} < \infty \stackrel{\text{т.9}}{\Rightarrow}$ раз ун. разл. $\Rightarrow$

$\stackrel{\text{т.9}^*}{\Rightarrow} \zeta(x)$ диф. на $[a, b]$

по т.7 $\zeta'(x)$ непрерыв. на $[a, b] \Rightarrow \forall x_0 \in (1, +\infty) \exists \delta > 0$ т.к. $\zeta'(x)$ и она непрерыв. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \zeta(x) \in C^1(1, +\infty)$

$\zeta^{(l)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^l \ln^l k}{k^x}$, аналог. дока-ть $\exists \zeta^{(l)}(x), \forall l=2,3,\dots$ непрерыв. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \zeta(x) \in C^{\infty}(1, +\infty).$

Теорема 10.

Пусть $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$

$\forall f_n(x)$ имеет первообразную на $[a, b]$

Тогда $f(x)$ тоже имеет первообразную на $[a, b]$.

Д-во. $\exists \{\Psi_n(x)\}$ посл-ть первообразных $\{f_n(x)\}$:

$\Psi_n'(x) = f_n(x)$ на $[a, b]$

$f_n \Rightarrow f(x) \Rightarrow \{\Psi_n'(x)\}$ - с.с. равн. на $[a, b]$.

Сх-то в т.х₀?

Фикс. $\forall x_0 \in [a, b]$ Δ первообр. $\Psi_n(x) = \Psi_n(x) - \Psi_n(x_0)$

$\varphi_n'(x) = \psi_n'(x) = f_n(x) \Rightarrow f'(x)$ и $\varphi_n(x_0) = 0 \quad \forall n$, т.е. $\{\varphi_n(x_0)\}$ - сходящаяся к 0
 $\xRightarrow{T.9} \varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$, $\exists \varphi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$
 $\exists \varphi(x) : \varphi'(x) = f(x)$ на $[a, b]$, т.е. $f(x)$ имеет первообр.

Вывод. Равномерная сходимость не выводит за пределы класса функций -

- имеющих предельное значение в точке (Т.6)
- непрерывных на интервале (Т.7)
- интегрируемых на $[a, b]$ (Т.8)
- дифференцируемых на $[a, b]$, при ун. равн. с-ти погл. приуб. (Т.9)
- имеющих первообразную на $[a, b]$ (Т.10).

Теорема 10⁴

Пусть ФР (1) с-ся равн. на $[a, b]$, $S(x)$ его сумма

$\forall u_n(x)$ имеет первообр. на $[a, b]$

Тогда $S(x)$ тоже имеет первообр. на $[a, b]$

($\Rightarrow$ из Т.10 для $\{S_n(x)\}$).

§4

Сходимость в среднем.

Теорема о полном интегрировании.

б ФП $\{f_n(x)\}$ на $[a, b]$

$\forall f_n(x)$ интегр. на $[a, b]$

некоторая ф-ция $f(x)$ интегр. на $[a, b]$

Тогда $[f_n(x) - f(x)]^2$ - интегр. на $[a, b]$

Опр. ФП $\{f_n(x)\}$ по с-с в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$, если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0$$

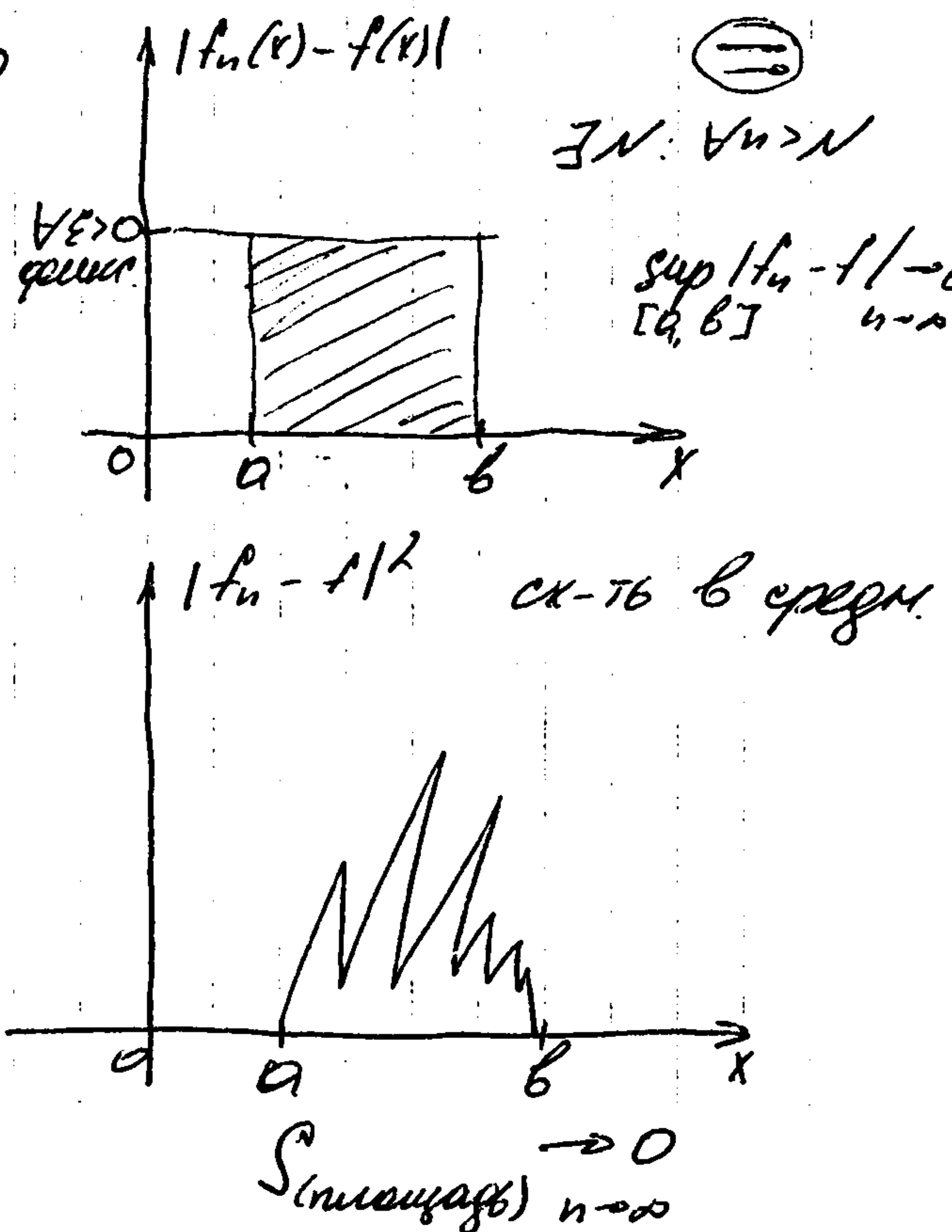
Обозн. $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$

Связь $\Rightarrow, \Rightarrow?$

Лем. 1 $\Rightarrow \Rightarrow$

Если ФП с-ся равн. на $[a, b]$, то она сходящаяся в среднем на $[a, b]$.

Обратное неверно.



Д-во: $\Rightarrow$ т.н. $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall x \in [a, b]: |f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b 1 dx = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n - f]^2 dx, \text{ т.е. } f_n \Rightarrow f \text{ на } [a, b].$$

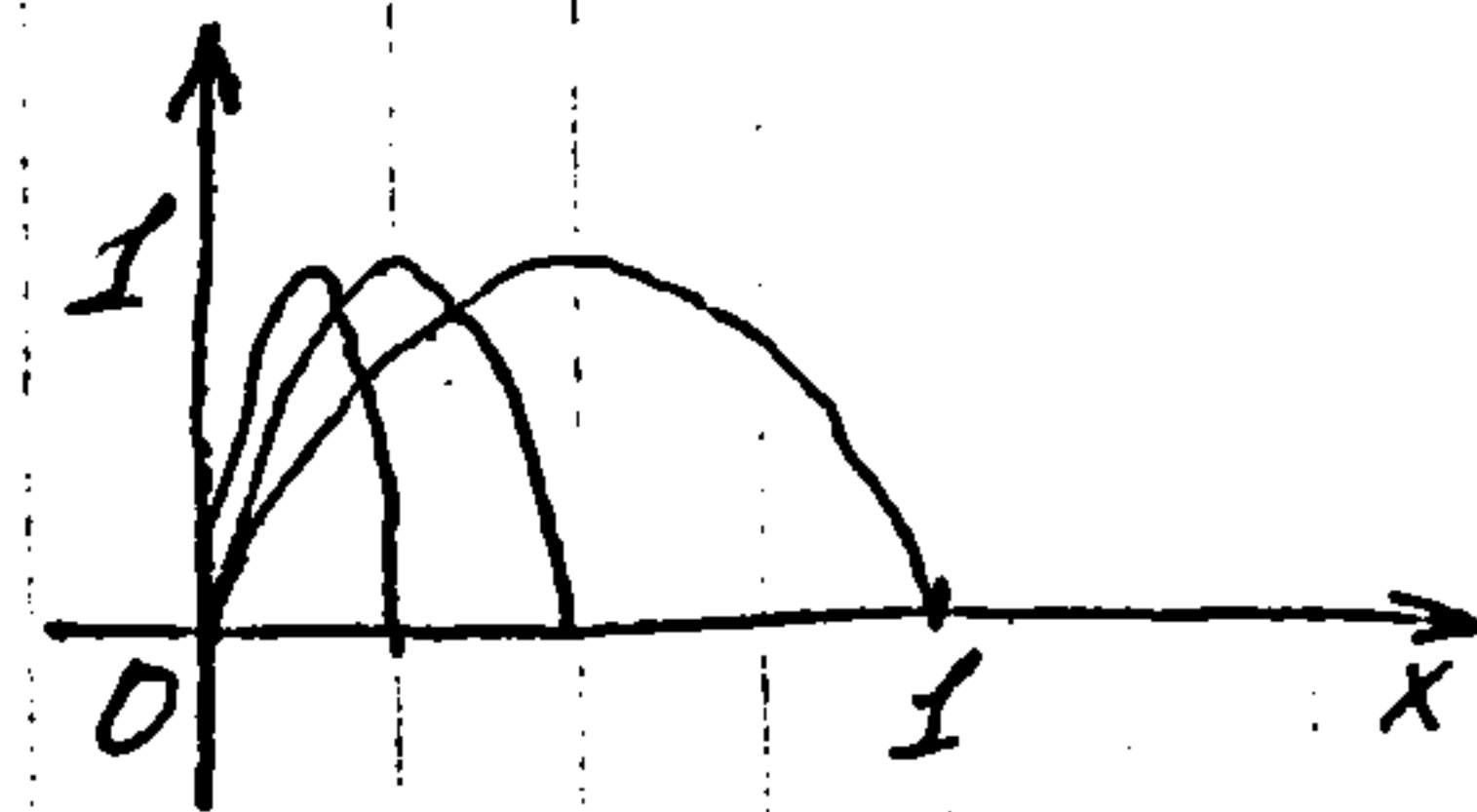
⊆ контрпример

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$f(x) \equiv 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[0, 1]} |f_n - f| = 1 \neq 0$$

$$f_n(x) \not\Rightarrow f(x) \text{ на } [0, 1]$$



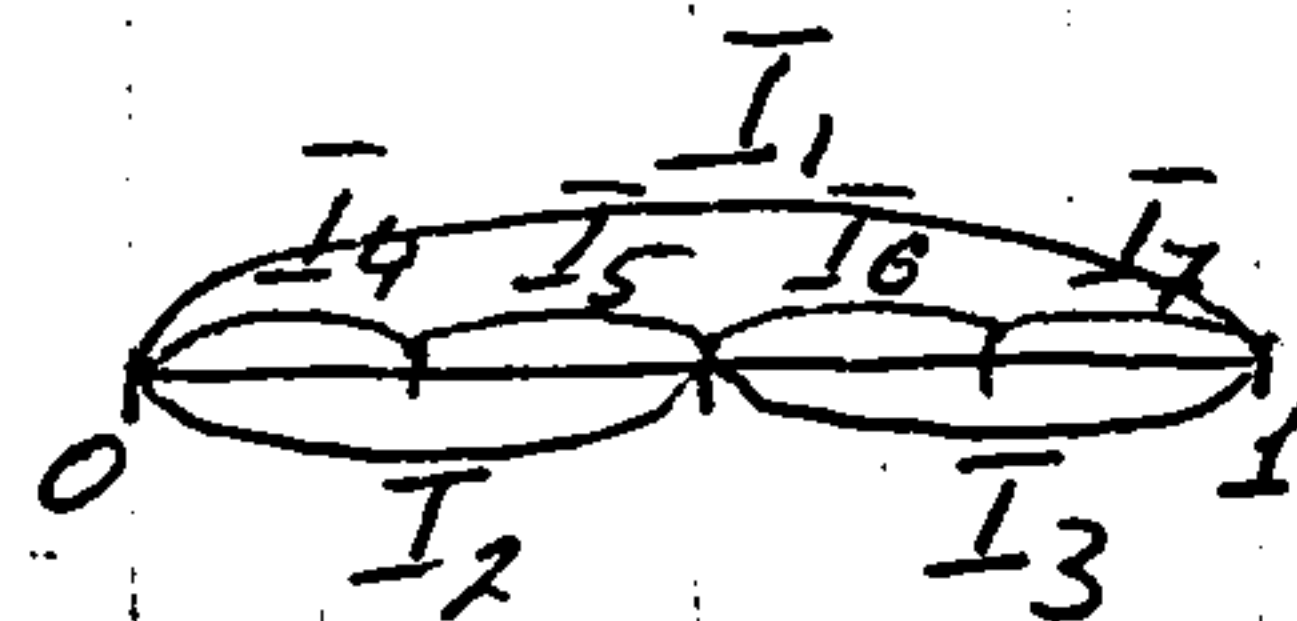
$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_0^{1/n} \sin^2 \pi n x dx \leq 1 \cdot \int_0^{1/n} 1 dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Всегда $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$?

Упр 2. $\Rightarrow \not\Leftarrow$

Цу сх-ти в среднем не адекват не только равн. сх-ти, но и сх-ти хаот. бы в одной точке ордука.

Контрпример



$$I_1 = [0, 1]$$

$$I_2 = [0, \frac{1}{2}], I_3 = [\frac{1}{2}, 1]$$

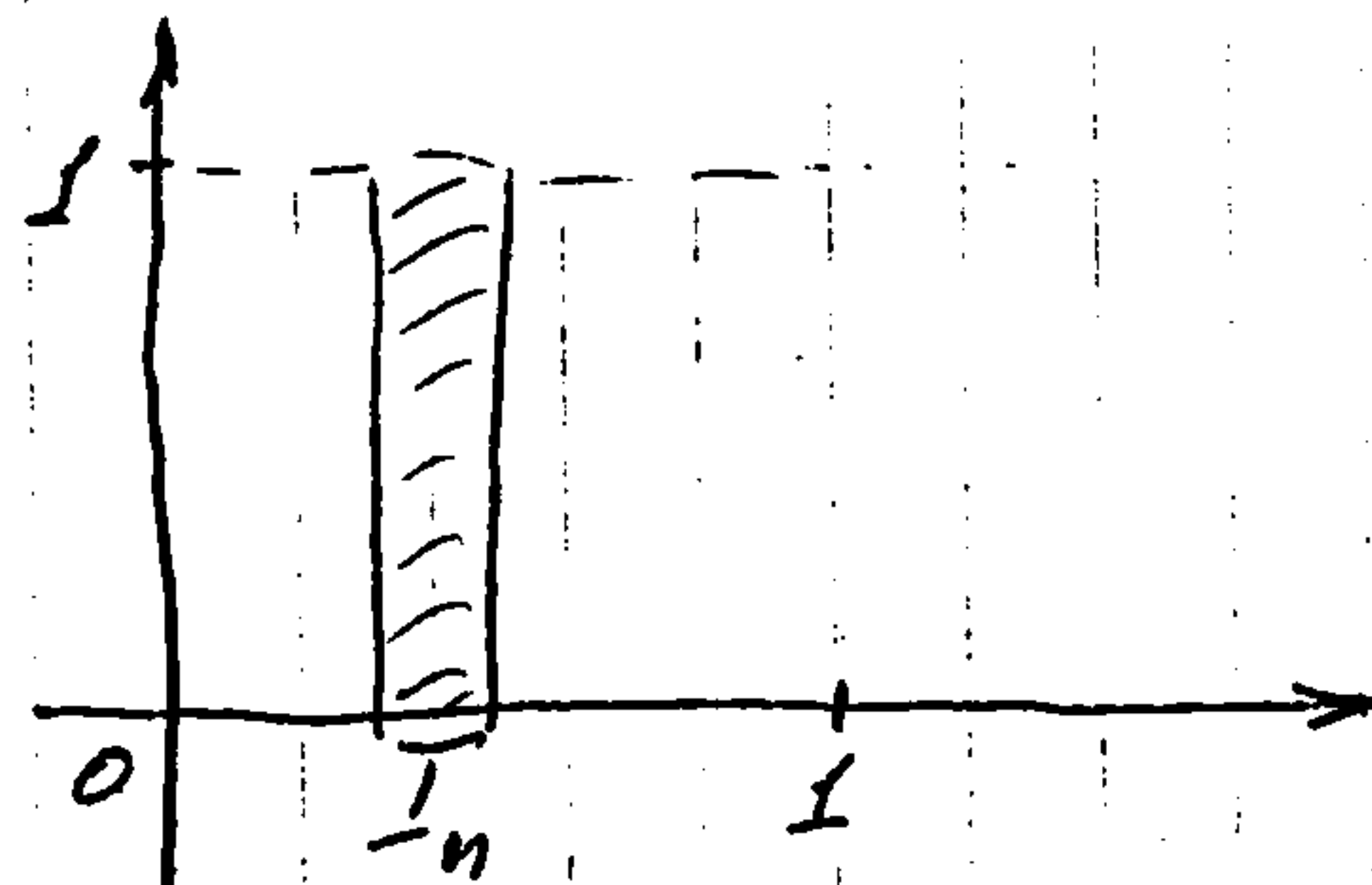
$$I_4 = [0, \frac{1}{4}], I_5 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], I_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], I_7 = [\frac{3}{4}, 1]$$

$$I_{2^n} = [0, \frac{1}{2^n}], I_{2^n+1} = [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}], \dots, [1 - \frac{1}{2^n}, 1] = I_{2^{n+1}-1}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_n \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus I_n \end{cases}$$

$$f_n(x) \Rightarrow 0 \text{ на } [0, 1]$$

$$\int_0^1 [f_n - f]^2 dx = \int_{I_n} 1^2 dx = |I_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



$\forall x_0 \in [0, 1] \exists$ как угодно большое n : $x_0 \in I_n$ и $f_n(x_0) = 1$

и $\exists$ — : $x_0 \notin I_n$ и $f_n(x_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ФП имеет 2 пред. точки $\{0, 1\} \Rightarrow$ расх-се.

Упр. 3 $\Rightarrow \nRightarrow \Rightarrow$

Если ФП сгр. на $[a, b]$ (не равн.), то она не обязана св-ся в среднем на $[a, b]$.

Контрпример

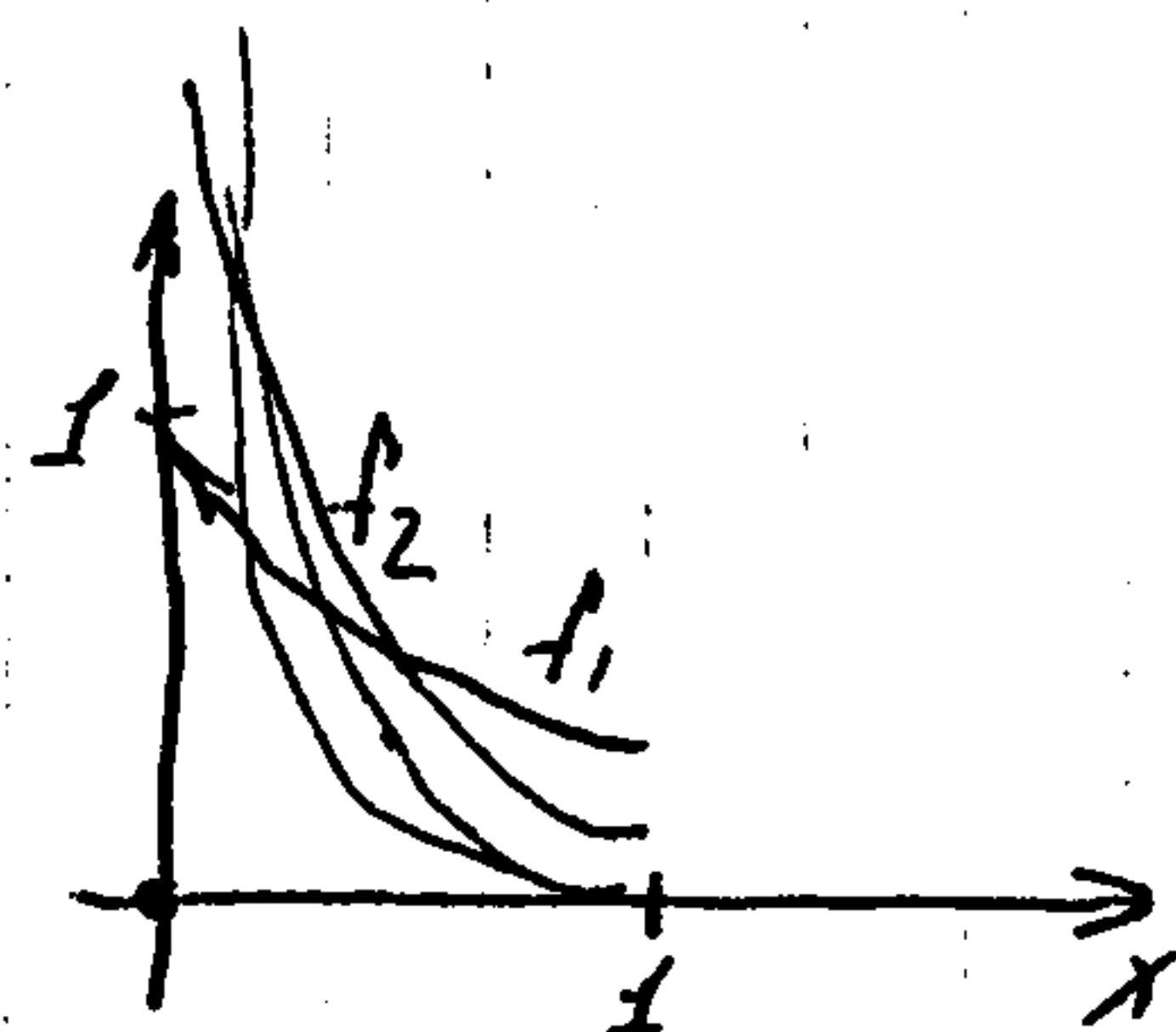
$$f_n(x) = \begin{cases} n e^{-nx}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \equiv 0$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ на } [0, 1]$$

$$f_n \stackrel{?}{\Rightarrow} 0 \text{ на } [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f_n - f]^2 dx &= n^2 \int_0^1 e^{-2nx} dx = -n^2 \cdot \frac{1}{2n} e^{-2nx} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} n (1 - e^{-2n}) \rightarrow +\infty, \text{ т.е. } f_n \nRightarrow 0 \text{ на } [0, 1]. \end{aligned}$$



Теорема 11. Пусть $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$

Тогда ФП $\{f_n(x)\}$ можно почленно интегрировать по $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Д-во:

$$\text{Д-во, что } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \left| \int_a^b f dx - \int_a^b f_n dx \right| < \varepsilon.$$

$$\bar{a}, \bar{b} : |(\bar{a}, \bar{b})| \leq \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| - \text{пер-во Коши-Буняковского} \quad (f, g) = \int_a^b f g dx.$$

Лемма. $\forall f(x), g(x)$ непрерыв. на $[a, b]$ справедливо след. пер-во:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2} - \text{пер-во Коши-Буняковского.}$$

Д-во:

$$\begin{aligned} \Delta \int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx &= \lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx - 2\lambda \int_a^b f g dx + \\ &+ \int_a^b f^2(x) dx \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \leq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\int_a^b f g dx \right)^2 - \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f g dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\int_a^b g^2 dx = 0, \int_a^b f^2 dx \neq 0$$

$$\int_a^b [\lambda f - g]^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f^2 dx - 2\lambda \int_a^b f g dx + \int_a^b g^2 dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{4} = \left(\int_a^b f g dx \right)^2 - \int_a^b g^2 dx \cdot \int_a^b f^2 dx \leq 0 \Rightarrow \text{н. К-Б.}$$

$$\int_a^b f^2 dx = \int_a^b g^2 dx = 0$$

$$\int_a^b (f+g)^2 dx = \int_a^b f^2 dx + \int_a^b g^2 dx + 2 \int_a^b fg dx \geq 0$$

$$\int_a^b (f-g)^2 dx = \int_a^b f^2 dx + \int_a^b g^2 dx - 2 \int_a^b fg dx \geq 0$$

$$\int_a^b fg dx \geq 0, \int_a^b fg dx \leq 0 \Rightarrow \int_a^b fg dx = 0 \quad \text{пер-во верно}$$

Доказательство:

Лекция №13
13.10.10

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N \quad & \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \\ & = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b [f - f_n]^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b 1^2 dx \right)^{1/2} = \\ & = \sqrt{b-a} \left(\int_a^b [f - f_n]^2 dx \right)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$f_n \Rightarrow f$

Теорема II* Если ФР ск-ва в среднем на $[a, b]$, $S(x)$ - его сумма на $[a, b]$, то его можно почленно интегрировать:

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

($\Rightarrow$ из т. II, т.к. для $\{S_n\}$ вст. с. ун.)

Узв. 4 Если ФП $\{f_n(x)\}$ сходятся в среднем на $[a, b]$, то $\{ \int_a^b f_n^2(x) dx \}$ явл. сходящимся.

Доказательство: $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2), f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$

$$\int_a^b f_n^2 dx = \int_a^b ((f_n - f) + f)^2 dx \leq \int_a^b (f_n - f)^2 dx + 2 \int_a^b (f_n - f)f dx + \int_a^b f^2 dx$$

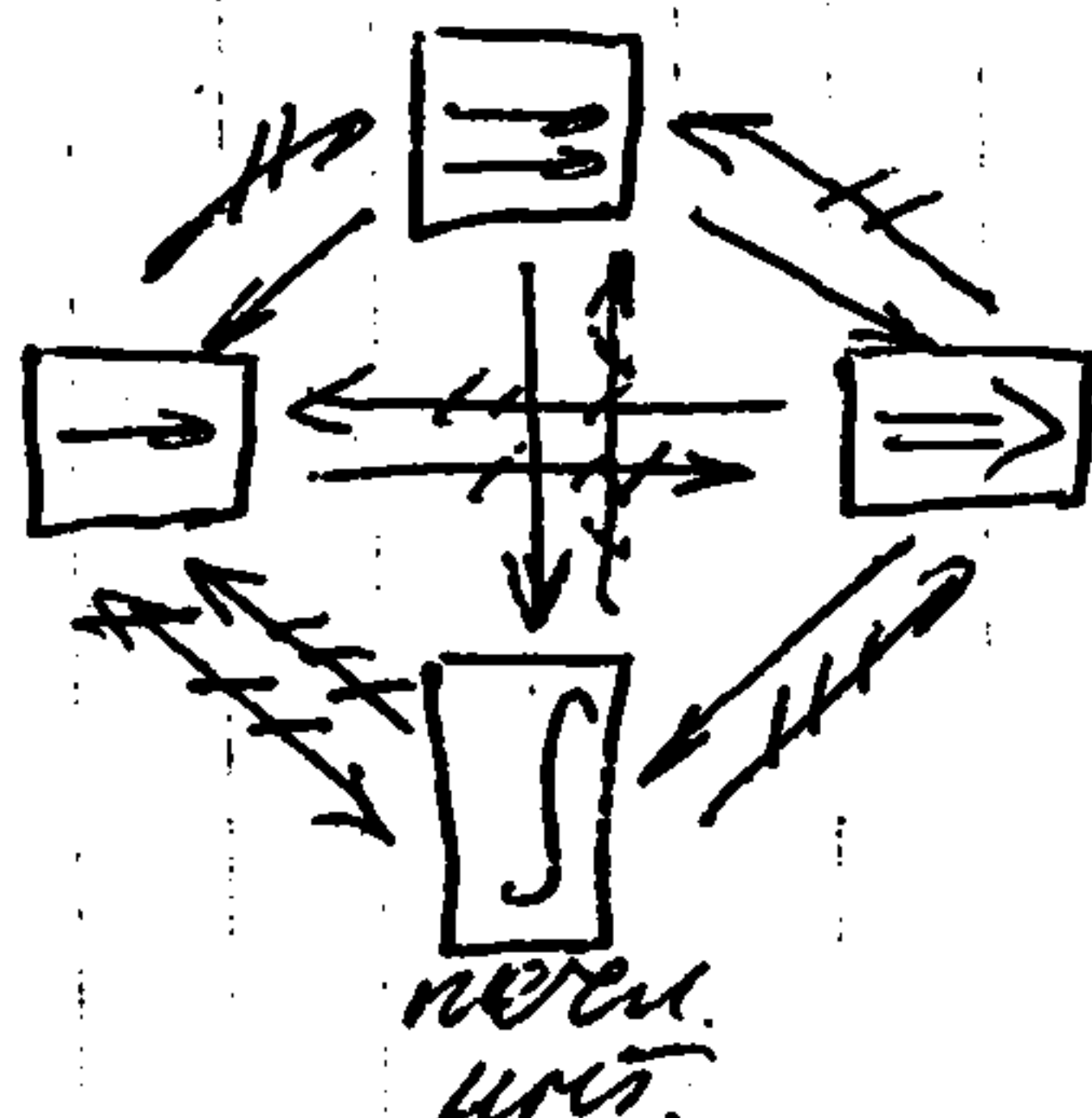
$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ $\xrightarrow{\text{const}}$ ср.

$$f_n = \begin{cases} n e^{-nx}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\{ n^2 \int_0^1 e^{-2nx} dx \}$ - не сходит.

Узв. 5 Из возможности почл. инт. ФП

$\nRightarrow$ ск-ть на инт-ве и равн. ск-ть на $[a, b]$



Примечание к узв. 2 $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_n \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus I_n \end{cases}$

$f_n \Rightarrow 0$ т.н. возм. почл. инт.

$\{f_n(x)\}$ не ск-ся ни в одной точке $[a, b]$

Узв. 6 Из возможности пош. шис. на $[a, b]$ $\nRightarrow$ ск-ти в среднем.

Пр. $f_n(x) = \begin{cases} n^{3/4} e^{-nx}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

$\int_0^1 f_n(x) dx = n^{3/4} \int_0^1 e^{-nx} dx = n^{3/4} \left(-\frac{1}{n} e^{-nx} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{n}} (1 - e^{-n}) \rightarrow 0 = \int_0^1 f(x) dx$

$f_n \not\Rightarrow f: \int_0^1 [f_n - f]^2 dx = \int_0^1 n^{3/2} e^{-2nx} dx = -\frac{n^{3/2}}{2n} (e^{-2nx}) \Big|_0^1 =$
 $= \frac{\sqrt{n}}{2} (1 - e^{-2n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

Узв. 7 Из ск-ти ФП на $[a, b]$ $\nRightarrow$ возм-ть её пош. шисур.

Пр. $f_n(x) = \begin{cases} n^2 e^{-nx}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

$\int_0^1 f_n(x) dx = n^2 \int_0^1 e^{-nx} dx = n(1 - e^{-n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \neq 0$ пошисмо не шисур.

§5. Выделение равномерно сходящихся подпоследовательностей.
 Теорема Арцелы.

Т.Б-В. $\{a_n\}$ - ср. $\Rightarrow \exists$ ск-ая подпосл. $\{a_{n_k}\}$

ФП $\{f_n(x)\}$ - равн. ср на мн-ве $\Rightarrow$ из неё можно выд. равн. ск-ую подпосл.

$f_n = \begin{cases} \cos \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$

$|f_n| \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1] - \text{равн. ср на } [0, 1]$

$\forall f_{n_k} \neq f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_{n_k} - f| = 1 \neq 0 \quad \forall n_k$

$f_n(x) = x^n, [0, 1], (0, 1)$

$|f_n| \leq 1$

$\{x^{n_k}\} \neq$

$f(x)$ равн. непрер. на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in [a, b]:$

$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Опр. ФП $\{f_n(x)\}$ наз. равномерно непрерывной на $[a, b]$ если $\forall$ такое же δ для мн-ва $\{f_n\}$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$
 где всех $n = 1, 2, \dots$, т.е. $\forall f_n(x)$ явл. равн. непрер. на $[a, b]$,
 все $\{f_n\}$ одинаково равн. непрер.

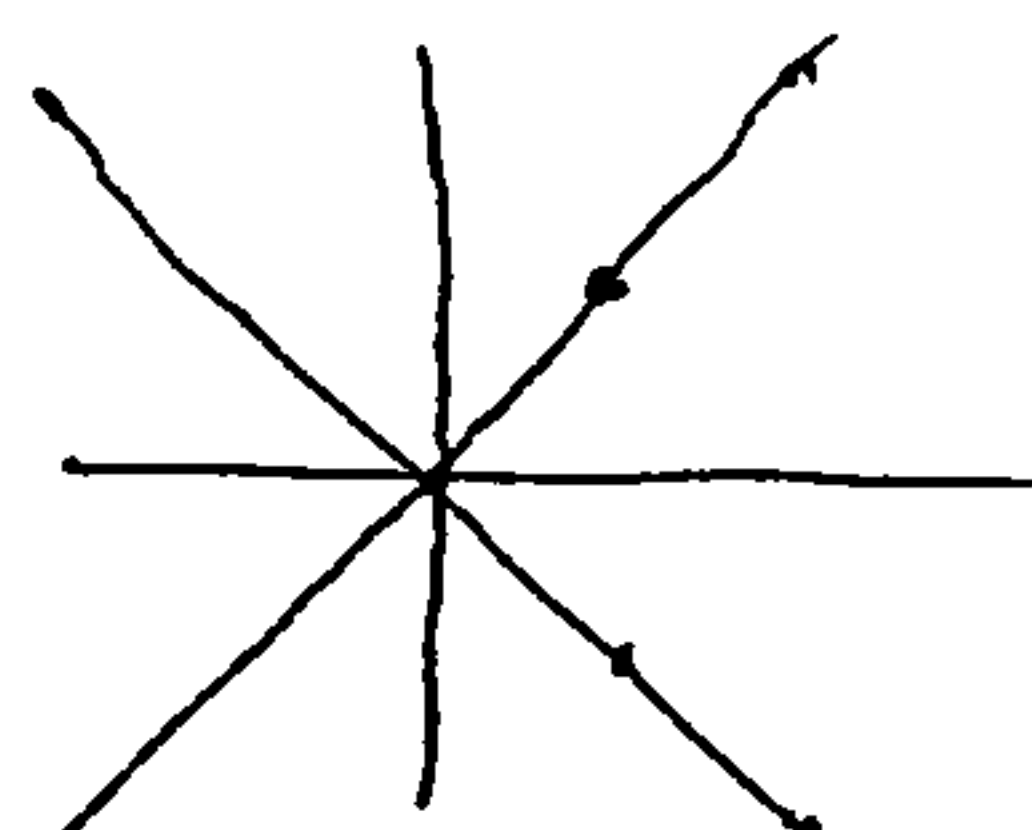
Пр. $f_n(x) = (-1)^n x$ на $\mathbb{R}$

$$\forall x', x'' \in \mathbb{R} \quad |f_n(x') - f_n(x'')| = |(-1)^n x' - (-1)^n x''| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon \text{ вст. оп. } \forall n. \Rightarrow \text{ФП равномерн. непр. на } \mathbb{R}.$$

Замечание.

Опр. можно давать для V любого в себе мн-во.



Ув. 1 Пусть ФП $\{f_n(x)\}$ состоит из дифференцируемых на $[a, b]$ ф-ций и $\{f'_n(x)\}$ - явл. равн. ограниченной на $[a, b] \Rightarrow \{f_n(x)\}$ явл. равномерн. непр. на $[a, b]$.

Пр. $f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n}, x \in \mathbb{R}$

$$f'_n(x) = \frac{2n \sin nx \cos nx}{n} = \sin 2nx$$

$$|f'_n(x)| \leq 1 \quad \forall n, \forall x \in \mathbb{R} \text{ т.е. явл. равн. непр.}$$

Д-во. $\{f'_n(x)\}$ - равн. оп. $\Rightarrow \exists M = \text{const} > 0 : |f'_n(x)| \leq M, \forall n, \forall x \in [a, b]$

$$\forall x', x'' \in [a, b]$$

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |f'_n(\xi)(x' - x'')| \leq M |x' - x''| < \varepsilon$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \{f_n(x)\} \text{ равномерн. непр. на } [a, b].$$

$$\{x''\} \text{ на } [0, 1] \text{ , на } [0, 1], (0, 1) \\ |f'_n(x)| \leq 1 \text{ рс н. не рс н.}$$

Теорема 12 (Теорема Арцелы)

Из всякой равномерно ограниченной и равномерно непрерывной на $[a, b]$ ФП можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

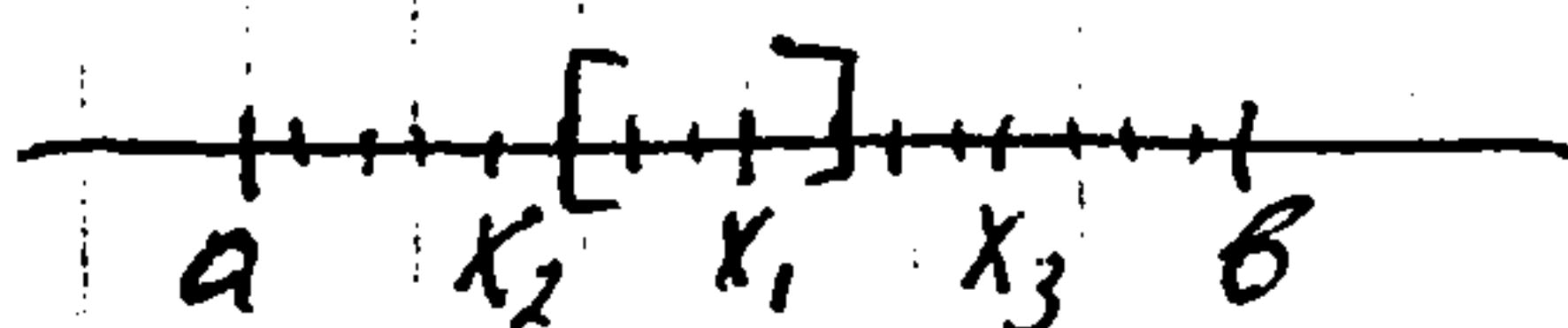
(вместо $[a, b]$ можно $\Delta (a, b)$)

Пр. $f_n(x) = \begin{cases} \cos \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$

$$|f'_n(x)| \leq 1 \quad \forall n, \forall x - \text{равн. оп.}$$

$$\forall f_{n_k} \not\rightarrow f \xRightarrow{\text{т.12}} \{f_n(x)\} \text{ не явл. на } [0, 1] \text{ равномерн. непр.}$$

Д-во: 1) Построим мн-во точек $\{x_n\} \subset (a, b)$:



x_1 - центр $[a, b]$ пополам
 x_1, x_2, x_3 - на 4 равн. части
 $x_1 - x_7$ - на 8 равн. частей
 $\{x_n\}$

$\{x_n\}$: $\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall$ отрезка длины δ , принадлежащего $[a, b]$,
среди первых n_0 точек этой пом.-ти $\exists$ хотя бы одна, принадлежащая
этой отрезку

Такая пом.-ть точек наз. веподу тлотой на $[a, b]$.

2) Δ ФП $\{f_n(x)\}$ в т.х, - чис. пом. $\{f_n(x_i)\}$

Т.к. $\{f_n(x)\}$ - равн. сур. на $[a, b]$, то $\{f_n(x_i)\}$ явл. сур. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Б-В су мей можно выднть сж-е потполн-ть $\{f_n(x_i)\}$

Δ ФП $\{f_n(x)\}$ - сж-е хотя бы в одной точке x_i .

$\Delta \{f_n(x_2)\}$ - сур. (потполн. иск. пом.)

Выднм сж-е потполн. $\{f_n(x_2)\}$

Δ ФП $\{f_n(x)\}$ сж-е в т.х, и x_2 .

$\Delta \{f_n(x_3)\}$...

Получим сётное чис.-во ФП $\{f_{kn}^*(x)\}$:

f_{11}	f_{12}	...	f_{1n}	...
f_{21}	f_{22}	...	f_{2n}	...
f_{n1}	f_{n2}	...	f_{nn}	...

ФП $\{f_{kn}\}$ - в к-ой сур. сж-е
в т. $x_1, x_2, \dots, x_k \in \{x_n\}$

Каждая сур. сур. - потполн. предуд. сур. сур.

Выднм диагональную потполн. $\{f_{nn}(x)\}$ - эта пом. сж-е $\forall x_k \in \{x_n\}$,

т.к. $\forall n \geq k \quad \{f_{nn}(x)\} \subset \{f_{kn}(x)\}$ - потполн. к-ой сур. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сж-е в т.х, $\dots, x_k$

3) Д-ем, что эта ФП $\{f_{nn}(x)\}$ сж-е равном. на $[a, b]$

Для красной ободн. $f_{nn}(x)$ черз $f_n(x)$

Эта ФП будет равном. кепер на $[a, b]$, т.к. исходная пом. обндрет
этнн сж-е $\Rightarrow$

Фикс $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in [a, b] : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
 $\forall n = 1, 2, \dots$ (1)

Разбиваем $[a, b]$ на конечное число отрезков длины $< \delta$.

Т.к. $\{x_n\}$ - веподу тлотая на $[a, b]$, то $\exists n_0$: на каждом из
отрезков разбиения будет хотя бы одна точка $x_n, n \leq n_0$

$x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$

ФП $\{f_n(x)\}$ сход в каждой из этих точек:

$$\exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n > N, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad \forall \ell = 1, 2, \dots, n_0, \quad |f_{n+p}(x_\ell) - f_n(x_\ell)| < \varepsilon/3 \quad (2)$$

N от ℓ не зависит

Фикс $\forall x \in [a, b]$

x попадет на один из отрезков разбиения $\Rightarrow \exists x_\ell \in \{x_\ell\} : |x - x_\ell| < \delta, \ell \leq n_0$

$\forall p \in \mathbb{N}, n > N$ из условия (2)

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\leq |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_\ell)| + |f_n(x) - f_n(x_\ell)| + \\ &\quad + |f_{n+p}(x_\ell) - f_n(x_\ell)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(2)} = \varepsilon \end{aligned}$$

Т.к. N от x не зависит, то получ. оценка верна $\forall x \in [a, b] \Rightarrow$

т.е. $\{f_n(x)\}$ - сходящаяся на $[a, b]$

Упр 2. $\{f_n(x)\}$ равномерно сходятся на $[a, b]$

и $\exists x_0 \in [a, b] : \{f_n(x_0)\}$ - сходящаяся.

Тогда $\{f_n(x)\}$ - равномерно сходятся на $[a, b]$.

Док-во: $\exists M > 0 : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n$

$\{f_n(x)\}$ - равномерно сходящаяся $\Rightarrow \exists \delta > 0$ на $\forall$ отрезке из $[a, b]$ длины $\leq \delta$, колебания ф-ции $f_n(x)$ будут $\leq \delta = \varepsilon$, $\forall n$.

Разбиваем $[a, b]$ на конечное число отрезков длины $\leq \delta$.

Тогда колебания ф-ции f_n $\forall n$ на всем отрезке $[a, b] \leq$ сумме колебаний на этих отрезках, т.е. $\leq \rho$.

$\forall x \in [a, b], x \neq x_0$

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0)| < \underbrace{\rho}_{\leq \delta} + M, \quad \forall x \in [a, b], \forall n, \quad (x \neq x_0)$$

т.е. $\{f_n(x)\}$ - равномерно сходятся на $[a, b]$.

Вопрос 1. Привести пример ФП $\{f_n(x)\}$ - равномерно сходящаяся на отрезке $[a, b]$, но не сходящаяся на множестве $\{x_k\}$.

2. Признак равномерной сходимости ФП:

Упр 3. $\exists \varphi \text{ и } \{f_n(x)\}$ явл. равност. непрер. на $[a, b]$ ((a, b)) и сх-ся в каждой точке этого мн-ва
Тогда $f_n(x) \Rightarrow$ на мн-ве.

§6. Степенные ряды.

Ряд вида $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ (1) наз. степенным рядом.

a_k - коэф. ряда (1), $a_k \in \mathbb{R}$ ($a_k \in \mathbb{C}$)
 x - переменная, $x \in \mathbb{R}$

Более общий вид $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ сводится к (1) заменой $x-x_0=y$

1. Область сходимости степенного ряда.

Все ряды (1) сх-ся в т. $x=0$.

$\exists$ ст. ряды сх-ся только в т. $x=0$: $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$

Используя признак Коши для сх-ти рядов с монотон. членами.

$(\sum_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geq 0 \quad \sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \Rightarrow \text{ряд сх-ся}$
 $\sqrt[k]{p_k} \geq 1 - \text{расх-ся})$

$$\sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$$

Δ числ. посл. $\sqrt[k]{|a_k|}$ (2) $k=1, 2, \dots$

Возможны 2 случая:

1) Посл. (2) - монот.
 2) Посл. (2) - ср. $\Rightarrow \exists$ кон. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$.

Теорема 13 (Теорема Коши-Адамара)

Δ ст. ряд (1).

1) $\exists$ посл. (2) явл. монот. $\Rightarrow$ ряд (1) сх-ся только в т. $x=0$

2) $\exists$ посл. (2) явл. ср. и $L > 0 \Rightarrow$ ряд (1) сх-ся абсолютно $\forall x: |x| < \frac{1}{L}$,
т.е. $\forall x \in (-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$
и расх-ся $\forall x: |x| > \frac{1}{L}$.

3) $\exists$ посл. (2) ср. и $L = 0 \Rightarrow$ ряд (1) сх-ся абсолютно на $\mathbb{R}$, т.е. $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ошибки на экзамене:

- 1) $\sqrt[k]{|a_k|}$ - ?
- 2) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ - ?
 $\neq 1 + (-1)^n$
- 3) $|x| \leq \frac{1}{L}$
- 4) абсолютная сх.
- 5) док-во расх-ти в x
 $|x| > \frac{1}{L}$

Док-во:

1) $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ - монот.

Фикс. $\forall x \neq 0$. $\Delta \{\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}\} \Rightarrow$
 $\sqrt[n]{|a_n x^n|} \geq 1$? и

$\Rightarrow$ для сколь угодно больших номеров n $\exists$ такое:
 $\sqrt[n]{|a_n x^n|} \geq 1$? и
 $|a_n x^n| \geq 1 \Rightarrow$ наруш. необход. усл. сх-ти числ. ряда $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ряд расх-ся.

2) $L > 0$. Фикс. $\forall x \neq 0, |x| < \frac{1}{L}$.

$$\exists \varepsilon > 0 : |x| > \frac{1}{3+L} > \frac{1}{7}$$

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ — макс. пред. точка

$$\exists N : \forall n > N : \sqrt[n]{|a_n|} > L + \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n < N$$

$$\forall n > N : \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{3+L} (L + \frac{\varepsilon}{3}) = \frac{1}{2} > 1 \quad \Rightarrow \text{попр. казни}$$

пред (1) с.к. а.д.с. в т.х, а т.х. $x - A = 0$
 $\Rightarrow$ на $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Фикс. $\forall x : |x| > \frac{1}{L}$.

$$\exists \varepsilon > 0 : |x| > \frac{1}{3-L} > \frac{1}{7}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L - \varepsilon$$

Т.к. L — макс. пред. точка по л. (2), то $\exists$ подпослед. $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow L \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon \quad \forall n_k > N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n_k > N : \sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{3-L} (L - \varepsilon) = 1 \quad \forall n_k$$

$$|a_{n_k} x^{n_k}| > 1 \quad \forall n_k > N, \text{ т.е. } a_{n_k} x^{n_k} \not\rightarrow 0 \Rightarrow a_n x^n \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{пред (1) расх. в т.х} \Rightarrow \forall x : |x| > \frac{1}{L}$$

3) $L = 0$, т.к. $L > 0$, то $L = 0$ — единств. пред. точка

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\text{Фикс. } \forall x \neq 0 : \varepsilon = \frac{1}{2|x|} \quad \exists N : \forall n > N : \sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon = \frac{1}{2|x|} \quad | \cdot |x|$$

$$|x|^n \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|} < \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \text{попр. казни пред (1) с.к. а.д.с. в т.х, } x - A = 0$$

$\Rightarrow$ на $\mathbb{R}$ пред (1) с.к.-а.д.с.

Кратко Т. 13:

$$1) L = +\infty \Rightarrow (1) \text{ расх. } \forall x \neq 0$$

$$2) 0 < L < +\infty \Rightarrow (1) \text{ а.д.с. с.к. } |x| < \frac{1}{L}, \text{ расх.-с.к. } |x| > \frac{1}{L}$$

$$3) L = 0 \Rightarrow (1) \text{ а.д.с. с.к.-а.д.с. на } \mathbb{R}.$$

Теорема 14.

Если с.к. пред (1) с.к.-а.д.с. не только в нуле, то $\exists$ наиб. число R (возможно $= +\infty$) такое что пред (1) с.к. а.д.с. $\forall x \in (-R, R)$, расх.-с.к. $\forall x : |x| > R$.

R — макс. радиусом с.к.-ти ряда (1)

Интер. $(-R, R)$ макс. интервалом с.к.-ти ряда (1)

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Если $L = 0$, то $R = \frac{1}{0} = +\infty$, с.к.-т.б. на $(-\infty, +\infty)$

В точках $x = \pm R$ ряд (1) может как с.к.-а.д.с., так и расх.-с.к.-а.д.с. — нужно исслед.

Примеры 1. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, $L = \sqrt[4]{1} = 1$, $R=1$, $(-1, 1)$ - ун. с.т.у.
 $x = \pm 1$ - расх. у. Общ. с.т.у. $(-1, 1)$.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$, $\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} \right) = 1$

$(-1, 1)$ - ун. с.т.у., $x = \pm 1$ - расх. у. Общ. с.т.у. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ - с.т.у.

Общ. с.т.у.: $[-1, 1]$ абс. сходим. во всех точках.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $\sqrt[k]{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$, $R=1$, $(-1, 1)$ - ун. с.т.у.

$x=1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расх.

$x=-1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ с.т.у. ун.

$\Rightarrow$ общ. с.т.у. $[-1, 1)$
 в $x = -1$ - ун. с.т.у.
 $\forall x \in (-1, 1)$ - абс. с.т.у.

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$, $R=1$, $(-1, 1)$

$x=1$ с.т.у. ун.

$x=-1$ расх.

$\Rightarrow$ общ. с.т.у. $(-1, 1]$.

Замечание. Вместо $x \in \mathbb{R}$ можно $z \in \mathbb{C}$ в (1)
 Т. 13, 14 остаются в силе

$\exists R > 0$: $|z| < R$ расх. у. $|z| > R$ расх. у. $\mathbb{C}$ - круг радиуса R .

2° Функциональные свойства степенных рядов.

Во всех предыдущих теоремах ряд (1) с.т.у. не только в 0, т.е. $R > 0$.

Лемма. Для $\forall z \in (0, R)$ ряд (1) с.т.у. равном. на $[-z, z]$

Док-во: $\forall x \in [-z, z]$, $0 < z < R$:

$$|a_n x^n| \leq |a_n| z^n$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| z^n$ - с.т.у. по Т. 13(14), т.к. $|x| = z < R$

по пр. Вей.

$\Rightarrow$ ряд (1) с.т.у. равн. на $[-z, z]$

$$\overbrace{(-R \quad \quad \quad R)}^{[-z, z]}$$

$\Rightarrow \forall [a, b] \subset (-R, R)$ ряд $\Rightarrow$

$$\overbrace{(-R \quad \quad \quad R)}^{[a, b]}$$

$\nRightarrow$ на $(-R, R)$ или $[-R, R]$ ряд $\Rightarrow$

пр. с $\cos nx$.

Уб $R > 0$, ряд (1) с.т.у. в $x = R$

Тогда ряд $\Rightarrow$ на $[0, R]$

Если сходим. в $x = \pm R \Rightarrow$ ряд $\Rightarrow$ на $[-R, R]$

Лемма N 15
 20. 10. 10

Синус (по III пр. Абеля)

Средство из леммы

$R > 0, z \in (0, R) \Rightarrow$ сумма $S(x)$ ряда (1) явл. непрер. на $[-z, z]$
($\Rightarrow$ из 7.7)

Теорема 15

$R > 0 \Rightarrow$ сумма $S(x)$ ряда (1) явл. непрер. на $(-R, R)$

Д-во:

Фикс. $\forall x_0 \in (-R, R)$

$\exists z \in (0, R) : |x_0| < z$

По сл. из леммы $S(x)$ непрер. на $[-z, z] \Rightarrow$ в т. x_0

Из 4.6 (выше) $\Rightarrow$, что если ряд (1) сх-но в т. $x = \pm R \Rightarrow S(x)$ непрер. на $[-R, R]$

Интегрируемость.

Теорема 16.

$R > 0$. Фикс. $\forall x \in (0, R)$

Тогда ряд (1) можно почленно интегрировать на $[0, x]$, получаящийся при этом ст. ряд имеет тот же радиус сх-ти, что и ряд (1).

(аналогично, $x \in (-R, 0) \Rightarrow$ на $[x, 0]$ почл. инт. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall [a, b] \subset (-R, R)$ ряд (1) можно почл. инт.)

Д-во: $\exists z \in (0, R) : 0 < x < z < R \xrightarrow{\text{из 7.8}} \text{на } [-z, z] \text{ можно почл. инт.} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{на } [-x, 0] \text{ и } [0, x] \text{ можно почл. инт.}$

Почл. почл. инт. по $[0, x]$ $\int_0^x [\quad] dt$ получим ряд

$$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

с тем же радиусом сх-ти R ,

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_n|}^{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{|a_n|} \right)^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \Rightarrow R_1 = R$$

Дифференцируемость.

Теорема 17.

$R > 0$

Тогда сумма ст. ряда явл. непрер. диф-ной ф-цией, ряд можно почл. диф-ть, получаящийся при этом ст. ряд имеет тот же радиус сх-ти, что и ряд (1).

Следствие. Сумма $S(x)$ ряда (1) явл. беск. диф. ф-цией на $(-R, R)$, т.е. $S(x) \in C^\infty(-R, R)$.

Д-во:

по Т. 9*

Достаточно доказать, что радиус сходимости при диф. не уменьшается.

Продиф. (1) почленно:

$$a_1 + 2a_2x + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots$$

R_1 - радиус сходимости этого ряда.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{|a_n|})^{\frac{n}{n-1} \rightarrow 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \Rightarrow R_1 = R \end{aligned}$$

Т.к. R не уменьшается, то по Т. 15 функ. $S'(x)$ явл. непрер. на $(-R, R)$

3° Представление ф-ции степенными рядами.

Опр. Ф-ция $f(x)$ может быть разложена в ст. ряд на ин-ве $\{x\}$, если $\exists$ ряд (1), сходящийся к $f(x)$ на $\{x\}$ ($\Rightarrow \{x\} \subseteq (-R, R)$).

Лем. 1. Если $f(x)$ может быть разложена в ст. ряд (1) на $(-R, R)$, то $f(x)$ имеет непрер. производные $\forall$ порядков на $(-R, R)$. Этот ряд является рядом Тейлора ф-ции $f(x)$, т.е. все коэффициенты находятся по ф-ле:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Д-во: $f(x) \in C^\infty(-R, R)$ согласно следствию из Т. 17, т.к. $(-R, R)$ принадлежит или совпадает с интервалом сходимости ряда (1).

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in (-R, R)$$

по Т. 17 ряд можно почл. диф. $\forall$ членов ряда $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}x + \dots \quad \forall x \in (-R, R)$$

$$\text{] } x=0 : \quad f^{(n)}(0) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Замечание. Условие $f(x) \in C^\infty(-R, R)$ явл. необход. для разложимости $f(x)$ в ст. ряд, но не явл. достат. для этого.

Пример (Коши, 1823 г.)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow$ если $f(x)$ разложима в ст. ряд, то это ряд Тейлора и

$$f(x) \equiv 0 \text{ на } (-R, R), \text{ а } f(x) = 0 \text{ только в т. } x=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ не разложима в ст. ряд $\forall (-R, R)$.

Утв. 2 (критерий равномерности $f(x)$ в ст. ряд)

Для того чтобы $f(x)$ можно было разложить в ст. ряд (1) на мн-ве $\{x\}$, $\Leftrightarrow$ чтобы остаточный член в ф-ле Маклорена для $f(x)$ стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$ на $\{x\}$.

$$\text{Док-во: } \Rightarrow \exists \forall x \in \{x\} \quad f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k x^k}_{S_n(x)} + R_{n+1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x \in \{x\}$$

$$\Leftarrow \exists \forall x \in \{x\}$$

$$f(x) = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k x^k}_{S_n(x)} + R_{n+1}(x) \text{ — ф-ла Маклорена для } f(x), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \{x\} \Rightarrow f \text{ разл. в ряд (1) на } \{x\}$$

Разложение некоторых элементарных ф-ций в ст. ряд

Было доказано (Тхурс), что функции e^x в ф-лах Маклорена $\rightarrow 0$

$e^x, \cos x, \sin x$ на $\mathbb{R}$, $\ln(1+x)$ на $(-1, 1] \Rightarrow$ по доказ-му утв. справедливы.

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \quad \forall x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \quad \forall x \in (-1, 1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

4° Степенные ряды в $\mathbb{C}$.

$e^z, \cos z, \sin z$ $z \in \mathbb{C}$ можно определять как сумму ст. рядов:

$$e^z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (z = x \in \mathbb{R} \quad e^z = e^x)$$

$$\cos z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Теорема Коши-Вейерштрасса справедлива для этих рядов $R = +\infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ряды абс. с-с.

Док-ем, что $\forall z \in \mathbb{C} : e^{iz} = \cos z + i \sin z$

ф-ла Эйлер-Кутца 1748 17147

В разг для e^z получим (из)

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots \quad \begin{matrix} \text{Т.К. можно} \\ \text{переносить} \\ \text{ср-ки адд.} \end{matrix} \quad \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = \cos z + i \sin z.$$

$$z = x, z = -x, x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned} \quad \pm$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\ln z$? - обратная ф-ция к e^z

$$z = 2\pi i, \quad e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \quad | \ln$$

$$2\pi i = 0 \Rightarrow \begin{matrix} z \neq 0 \\ v = 0 \\ i = 0 \end{matrix} ?$$

$$\omega = \ln z \quad z = e^\omega$$

$$\omega = u + iv, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

u, v через x, y из $z = e^\omega$

$$z = x + iy = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v)$$

$$e^u = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \arg z + 2\pi k$$

$$u = \ln |z|$$

$$\omega = u + iv = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi ki \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$$

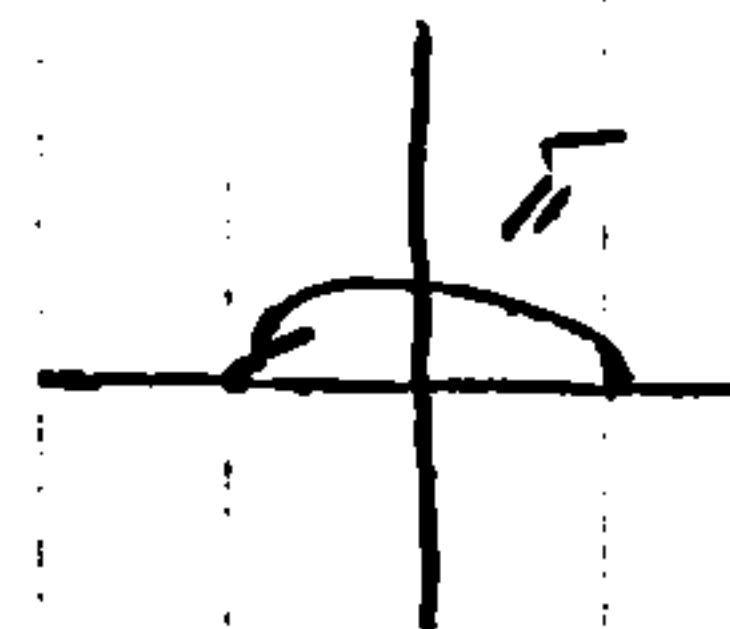
$$\ln z = \ln |z| + i \arg z \quad - \text{главное значение логарифма}$$

$$\ln(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = 0 + i\pi = i\pi$$

$$\ln i = \ln|i| + i \arg i = 0 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad z = \pi \quad e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$



Глава 3. Двойные и n-кратные интегралы

§1. Среднее и существование двойного интеграла.

Лекция №16
25.10.10

1° Случай прямоугольного множества.

E^2 , т. $P(x, y)$, $f(P) = f(x, y)$ на прямоугольнике:

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\} = [a, b] \times [c, d]$$

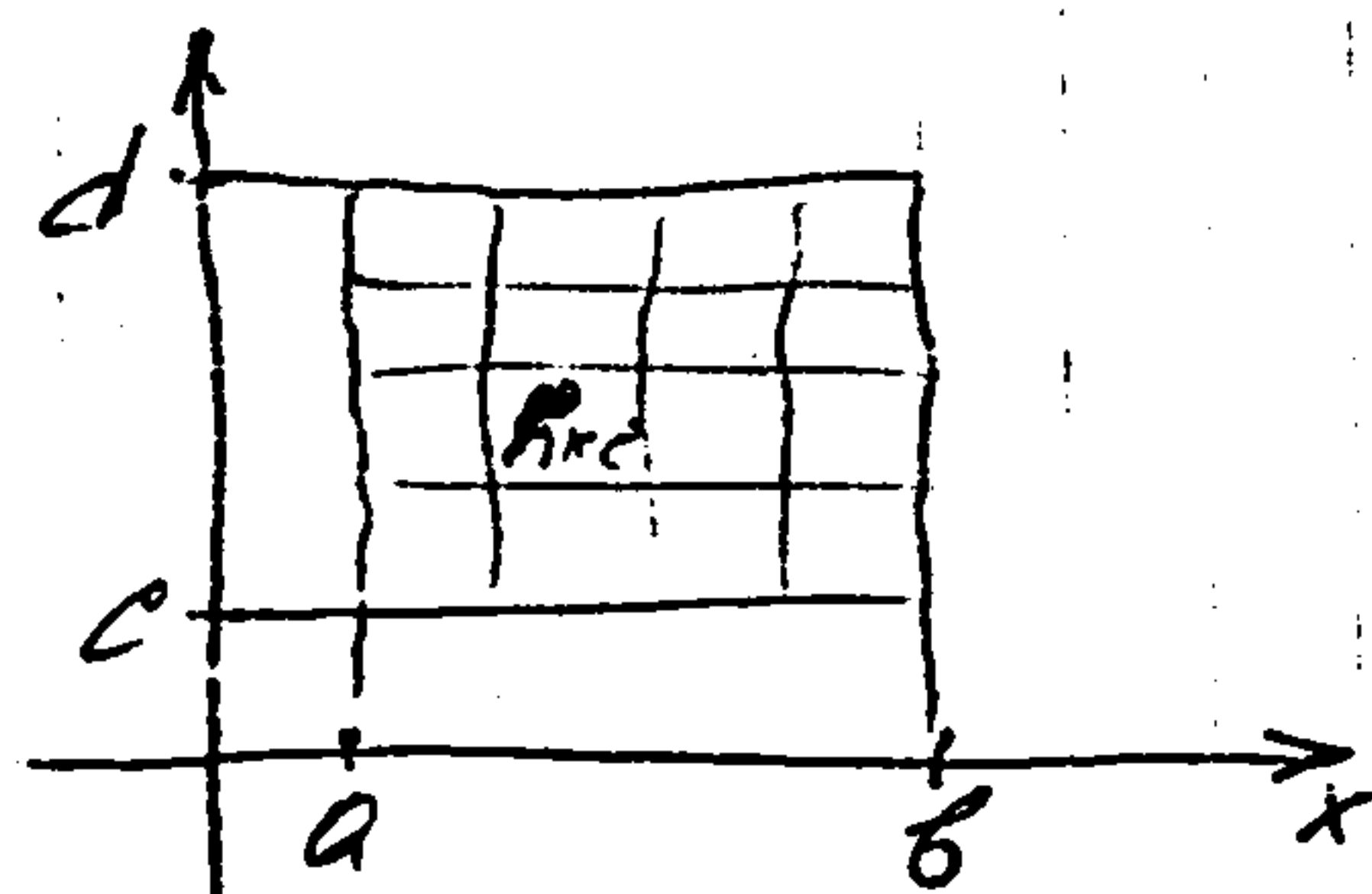
Разбиение отрезков: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
 $c = y_0 < y_1 < \dots < y_p = d$

R разбивается на np частных прямоугольников:

$$R_{k\ell} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{\ell-1}, y_\ell], \quad k = \overline{1, n}, \ell = \overline{1, p}$$

Разбиение np -ка R обозн. T .

T' — измельчение разб. T : получ. из T добавл. конечного числа прямых $\parallel OX$ или $\parallel OY$ пересек. с R .

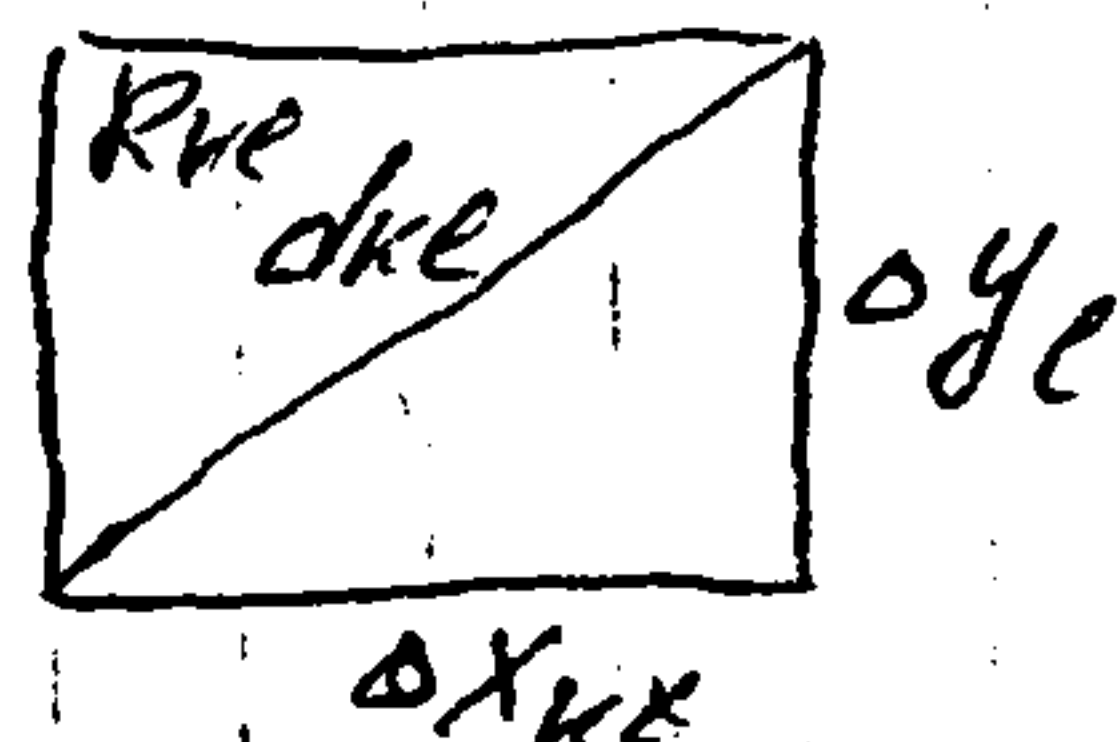


$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_\ell = y_\ell - y_{\ell-1}$$

$d_{k\ell} = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_\ell^2}$ — длина диаг. $R_{k\ell}$ — диаметр np -ка $R_{k\ell}$.

$\Delta = \max_{k, \ell} d_{k\ell}$ — диаметр разбиения T .

$\Delta R_{k\ell} = \Delta x_k \Delta y_\ell$ — площадь np -ка $R_{k\ell}$



Выбираем $\forall T, R_{k\ell} (\xi_{k\ell}, \eta_{k\ell}) \in R_{k\ell}$

$\sigma(f) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^p f(\xi_{k\ell}, \eta_{k\ell}) \Delta R_{k\ell}$ — сум. интегральной суммной ф-ции f отвечающей данному разб. T и данной выборке точек $P_{k\ell} \in R_{k\ell}$.

Опр. Число I наз. пределом инт. сумм $\sigma(f)$ при $\Delta \rightarrow 0$, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \Delta < \delta \Rightarrow |I - \sigma(f)| < \varepsilon$ независимо от выбора точек $P_{k\ell} \in R_{k\ell}$.

Опр. Ф-ция $f(x, y)$ наз. интегрируемой (по Риману) на np -ке R ,

если $\exists$ конечн. предел I инт. сумм $\sigma(f)$ при $\Delta \rightarrow 0$.

Этот предел наз. двойным интегралом от ф-ции $f(P)$ по np -ку R

$$\text{обозн. } I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma(f) = \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(P) d\sigma = \int_R f(P) d\sigma$$

По аналогии с однократным интегралом доказывается, что если f изм. по R , то она ограничена на R (о противном) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Далее рассматриваются только ограниченные на R ф-ции.

По аналогии с однокр. изм. строится теория Дарбу.

$$M_{ke} = \sup_{R_{ke}} f(x, y), \quad m_{ke} = \inf_{R_{ke}} f(x, y)$$

$$S^n = \sum_{k=1}^n \sum_{e=1}^p M_{ke} \Delta R_{ke}, \quad s = \sum_{k=1}^n \sum_{e=1}^p m_{ke} \Delta R_{ke} - \text{верхние и нижн. суммы Дарбу.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \leq \delta(f) \leq S^n$$

Справедливы следующие леммы:

Лем. 1 $\forall \varepsilon > 0 \exists R_{ke} : 0 \leq \delta(f) - s < \varepsilon$

$$\exists R_{ke} : 0 \leq S^n - \delta(f) < \varepsilon$$

Лем. 2 $\exists T'$ измельчение разб. T . $T \sim s, S^n$, $T' \sim s', S'^n$

$$\text{Тогда } s \leq s' \leq S'^n \leq S^n$$

Лем. 3 $\exists T_1, T_2$ - два произвольных разбиения пр-ка R .

$$T_1 \sim s_1, S_1^n, \quad T_2 \sim s_2, S_2^n$$

$$\text{Тогда } s_1 \leq S_2^n, \quad s_2 \leq S_1^n$$

Лем. 4 Мно-во $\{S^n\}$ верхних сумм, संब. всевозм. разб. пр-ка R , отор. снизу

мно-во $\{s\}$ - всевозм. нижних сумм, отор. сверху.

$$\Rightarrow \exists \text{ конечн. } \inf \{S^n\} = \overline{I} - \text{верхний и нижний интегралы Дарбу} \Rightarrow \underline{I} \leq \overline{I}$$

$$\sup \{s\} = \underline{I}$$

Лем. 5 $\exists T'$ измельч. разб. T , $T' \sim s', S'^n$

$$\text{Тогда } S^n - S'^n \leq (M-m) \cdot j \cdot \Delta \cdot d$$

$$s' - s \leq (M-m) \cdot j \cdot \Delta \cdot d, \quad \text{где } M = \sup_R f, \quad m = \inf_R f$$

j - кол-во дпт. примых разб. в T
 Δ - диаметр разб. T
 d - диагональ пр-ка R

Лем. 6 Верхн. изм. $\overline{I}$ явл. пределом сумм S^n при $\Delta \rightarrow 0$, $\underline{I}$ - предел s , $\Delta \rightarrow 0$

$$\overline{I} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S^n, \quad \underline{I} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} s$$

$\Rightarrow$ критерий интегрируемости f на R

Теорема 1. Для того чтобы ограниченная на пр-ке R ф-ция $f(x, y)$ была интегрируема по R , $\Leftrightarrow$, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ разбиение } T: S - s < \varepsilon.$$

Теорема 2. $\forall$ непрер. на пр-ке R ф-ция $f(x, y)$ непрер. по R

Док-во: f -непрер. на $R \Rightarrow f$ - равном. непрер. на R

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < \delta \quad \omega_{K\varepsilon}(f) < \frac{\varepsilon}{\Delta R}, \quad \omega_{K\varepsilon} - \text{модуль } f \text{ на пр. } R_{K\varepsilon} \Rightarrow \omega_{K\varepsilon} = M_{K\varepsilon} - m_{K\varepsilon}$$

$$\Rightarrow S - s = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^p \omega_{K\varepsilon} \Delta R_{K\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{\Delta R} \sum_k \sum_{\ell} \Delta R_{K\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\Delta R} \cdot \Delta R = \varepsilon$$

$$f - \text{опр. на } R \stackrel{T}{\Rightarrow} f \text{ инт. на } R.$$

Опр. Элементарной фигурой Q на плоскости наз. объединение конечного числа пр-ков, стороны которых $\parallel OX$ или $\parallel OY$.

Опр. Ф-ция $f(x, y)$ обладает I-свойствами на пр-ке R (на ин-ве D), если выполн. 2 усл.

- 1) $f(x, y)$ опр. на этом ин-ве;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists$ элементарная фигура Q , $\Delta Q < \varepsilon$ (площадь), содержащая все точки и линии разрыва ф-ции f на $R(D)$.

Теорема 3. Если $f(x, y)$ обладает I-свойствами на пр-ке R , то она интегрируема.

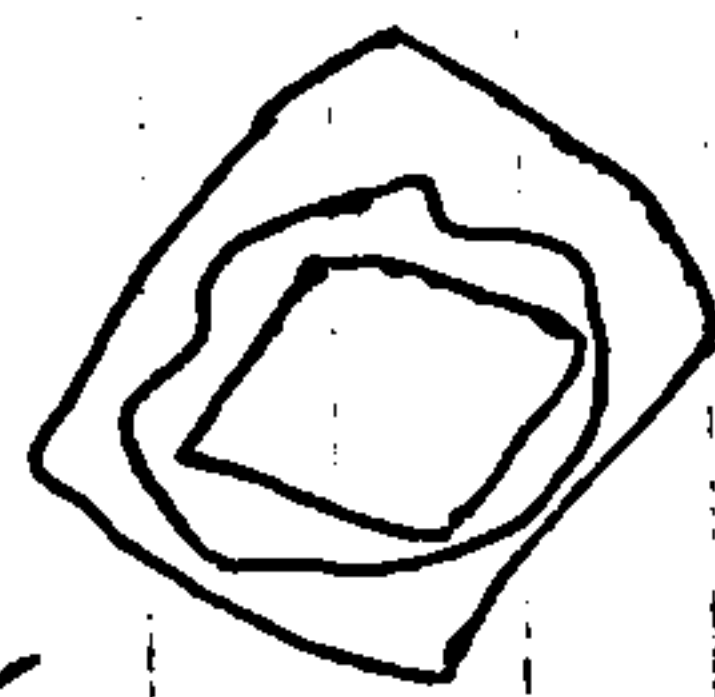
Док-тв. как и в одномерном случае.

1° Случай произвольного ин-ва

I курс - площадь полной фигуры

$$\overline{P} = \underline{P} = P$$

полная ф. - произв. опр. замкн. ин-во точек



Кривая Γ площади 0: $\forall \varepsilon > 0 \exists$ многоугол. контур Γ , площади $< \varepsilon$

В этом опред. можно заметить недостаток: эт. фигура - ин-ва

$\forall$ многоуг. площади $< \varepsilon$ можно замкнуть в эт. фигуру площади $< 3\varepsilon$

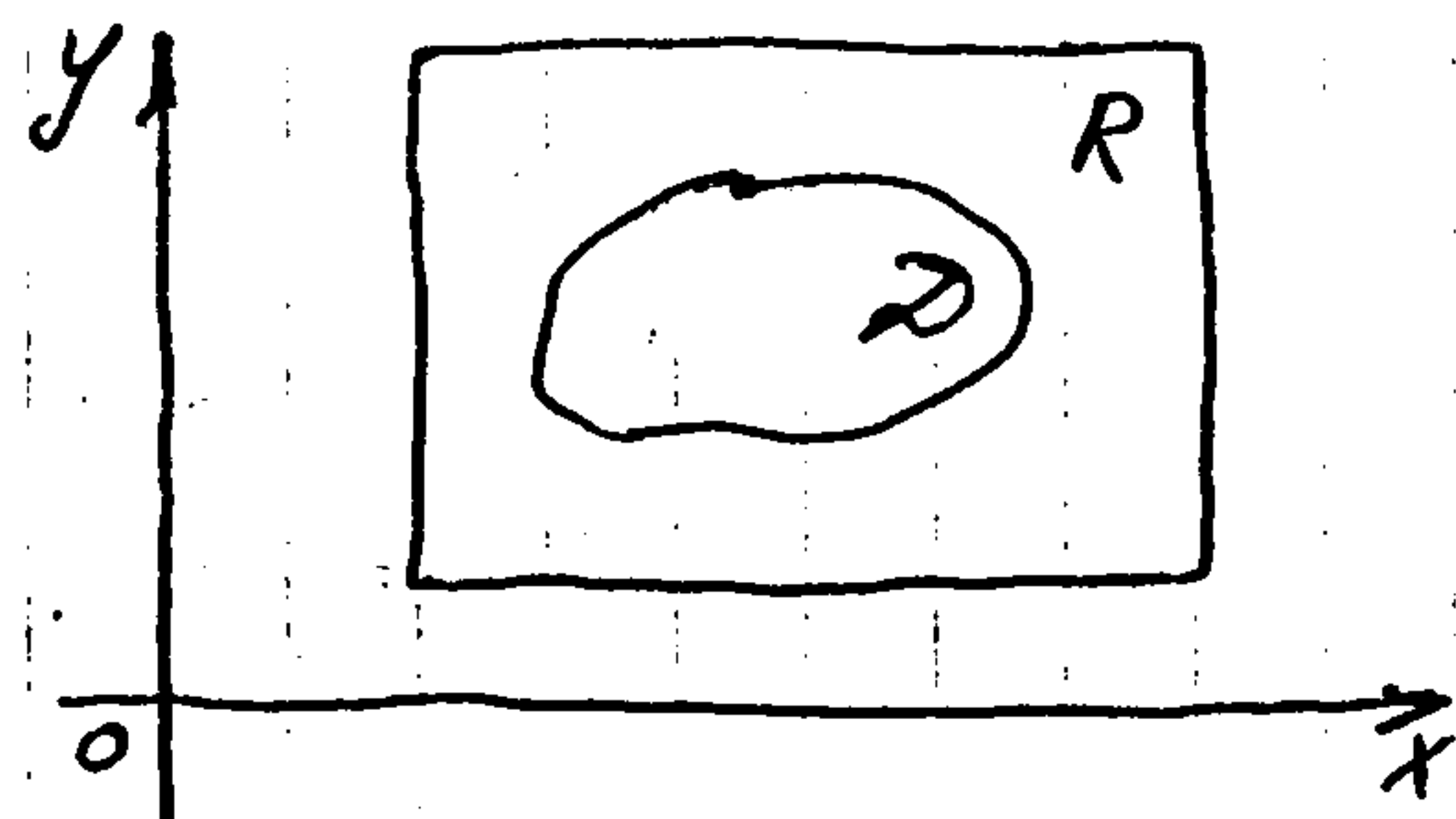
Уб. E^2 квадр. сетка с шагом h (прямая сетка с диаметром h), то

$$\forall \Gamma \subset \Omega: \forall \varepsilon > 0 \exists h: \text{сумма площ. прям. или кв.} < \varepsilon.$$

I ин-во D на плоскости - опр. замкнутое, $\partial D = \Gamma$ - площади 0

$$f(x, y) \text{ опр. на } D \quad \forall D \subset R \quad \forall R \subset D$$

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{на } D \\ 0 & \text{на } R \setminus D \end{cases}$$



Опр. Ф-ция $f(x, y)$ наз. интегрируемой (по Риману) на мн-ве D , если ф-ция $F(x, y)$ интегр. на R .

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho) d\sigma = \int_D f(\rho) d\sigma = \iint_R F(x, y) dx dy$$

Теорема 4. Если ф-ция $f(x, y)$ обладает I -св-ом на D , то она интегрируема по D .

Д-во: ф-ция $F(x, y)$ обладает I -св-ом на R , т.к. ее точки и линии разрыва либо совпадают с разрывами $f(x, y)$, либо лежат на границе Γ мн-ва D , а т.к. $\Delta \Gamma = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F \text{ - обл. } I \text{ св-ом} \Rightarrow \exists \iint_R F dx dy = \int_D f dx dy \quad \blacksquare$$

Следствие $\iint_D 1 dx dy = \Delta D$

$$f \equiv 1 \text{ на } D \text{ - обладает } I \text{ св-ом на } D \stackrel{7.4}{\Rightarrow} \exists \iint_D 1 dx dy$$

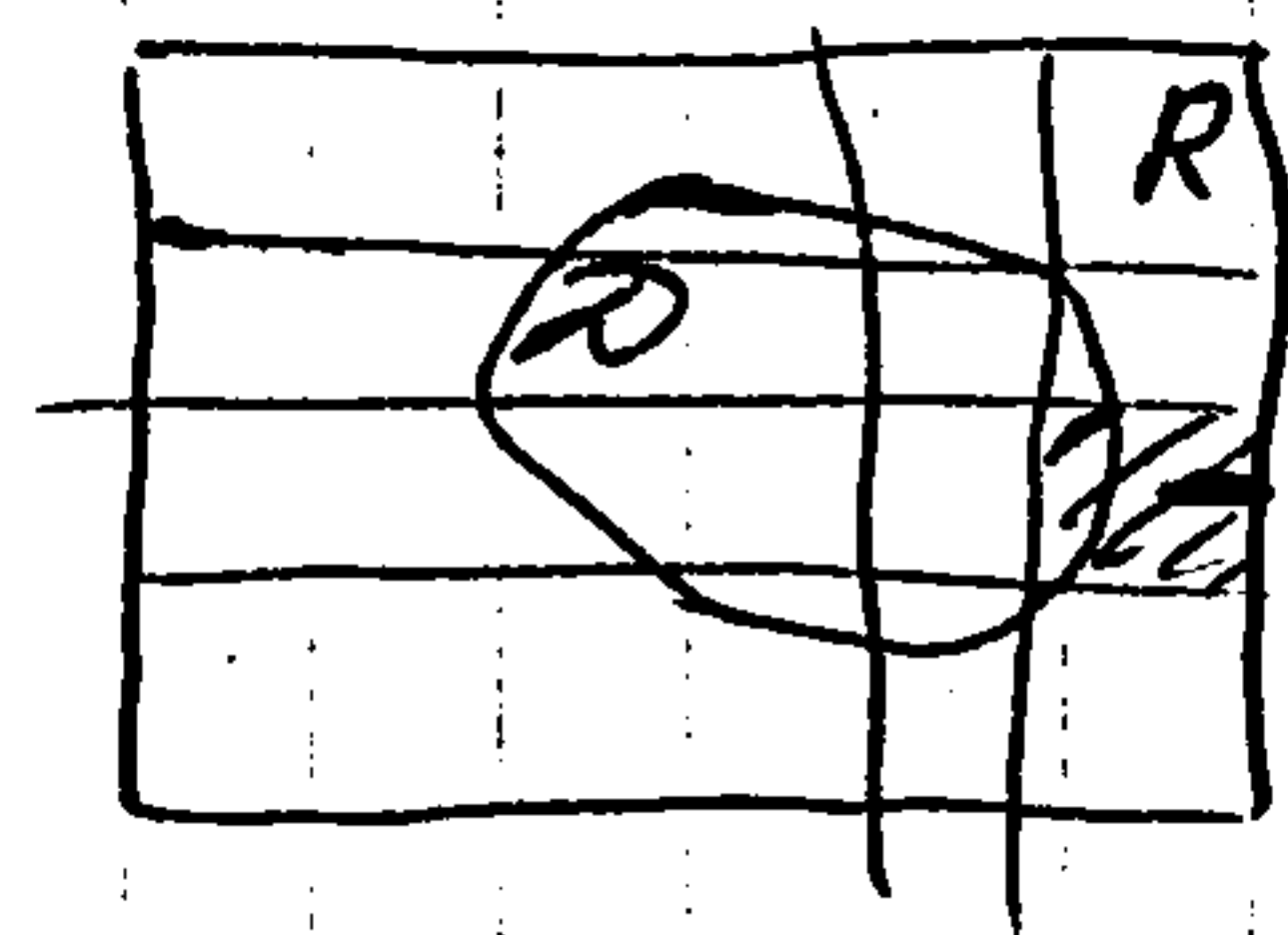
$R_{\epsilon} \subset D$ - вкл. и в S , и в S' .

$\Rightarrow S'$ - площадь стн. мн-ва около D
 S - площадь внут. в D мн-ва.

$$\Delta \rightarrow 0$$

$$S, S' \rightarrow \Delta D \text{ - площадь } D$$

$$S, S' \rightarrow I = \iint_D 1 dx dy.$$



входит в S
не входит в S .

3°. Общие свойства интегрируемости.

D - опр. замкн. квадр. мн-во на n -ти

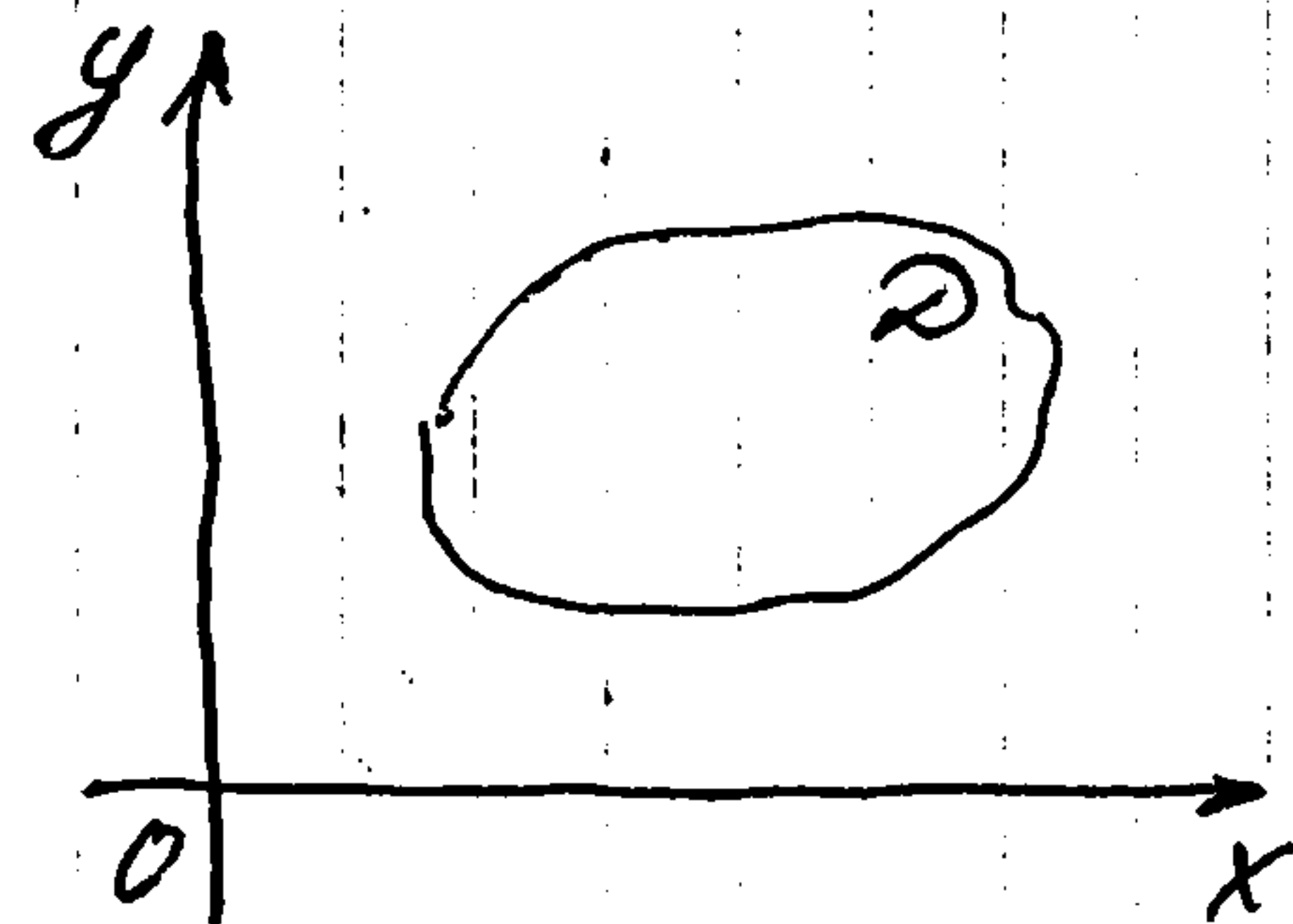
$f(x, y)$ опр. на D

Разбиваем мн-во D конечным числом кривых площадей 0 на конечное число частей D_i $i = 1, 2, \dots, r$ (и абз. связных) обзв. разб. D на $D_i \sim \tilde{T}$.

Т.к. ∂D_i - имеет площадь 0 , то все D_i - квадр. $\square$

$$d_i = \sup_{M, N \in D_i} \rho(M, N) \text{ - диаметр } D_i$$

$$\tilde{\Delta} = \max_{i=1, \dots, r} d_i \text{ - диаметр разбиения } \tilde{T}$$



ΔD_i - площадь части D_i .

Фикс. $\forall \tau, P_i \in D_i$.

$\tilde{\sigma}(\tau) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta D_i$ - н.у. инт. суммы ф-ции f , отв. разб. $\tilde{\tau}$ и выбору $\tau, P_i \in D_i$.

Опр. Число I н.у. предельно инт. суммы $\tilde{\sigma}(\tau)$ при $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$, если

Лекция N 17
27.10.10

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \tilde{\Delta} < \delta: |\tilde{\sigma}(\tau) - I| < \varepsilon$
независимо от выбора точек $P_i \in D_i$.

Опр. (общее стр. интегрируемости)

Ф-ция $f(x, y)$ н.у. интегрируемой (по Риману) на D , если $\exists$ конечный предел I инт. суммы $\tilde{\sigma}(\tau)$ при $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$

$$I = \lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} \tilde{\sigma}(\tau) = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(P) d\sigma = \int_D f(P) d\sigma$$

н.у. двойным интегралом от ф-ции f по D .

Теорема 5. Первое и второе общие определения двойного интеграла эквивалентны между собой.

Д-во: (I) Док-ем, что из общего стр. $\Rightarrow$ первое стр.

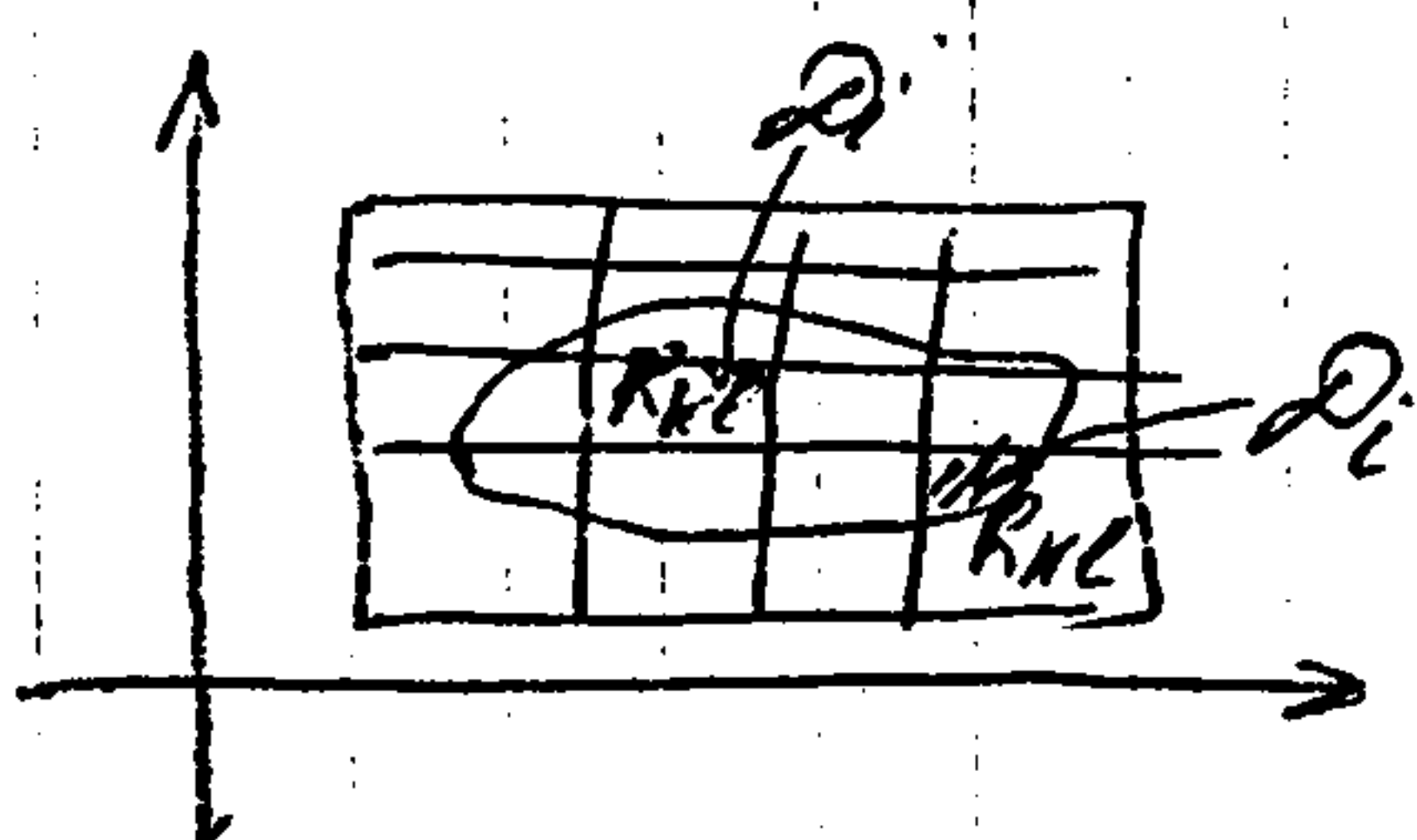
Дано: $\forall \tau \quad D = \bigcup_{i=1}^n D_i \quad \forall \tau, P_i \in D_i \quad \tilde{\sigma}(\tau) \xrightarrow{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} I = \iint_D f d\sigma$

Д-то: $\forall \tau \quad \forall R \quad \sigma(F) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} I$

$\forall R \quad D \subset R$ - пр-к Π_{ox}, Π_{oy}

$F = \begin{cases} f, D \\ 0, R \setminus D \end{cases} \quad \forall \text{ разб. Тир-ка } R, \forall \tau, P_{kl} \in R_{kl}, k = \overline{1, n}, l = \overline{1, p}$
 $\sigma(F), \Delta$

Сделаем с τ разб. $\tilde{\tau}$ на D_i



1) $R_{kl} \subset \subset D_i$ т.е. $R_{kl} \subset D, R_{kl} \cap \Gamma = \emptyset \Rightarrow$
компактное вложение
 $\Rightarrow D_i = R_{kl}, \tau, P_i = P_{kl}$

2) $R_{kl}: R_{kl} \cap \Gamma \neq \emptyset \Rightarrow D_i = R_{kl} \cap D$

$\forall \tau, P_i \in D_i \Rightarrow \text{разб. } \tilde{\tau} \text{ на } D, \tilde{\Delta}, \tilde{\Delta} \leq \Delta, \Delta \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{\Delta} \rightarrow 0$

$$|\sigma(F) - \tilde{\sigma}(\tau)| \leq M_0 \left(\sum_{\substack{R_{kl} \cap \Gamma = \emptyset \\ \text{слог, отв. } R_{kl} \subset \subset D_i \text{ скомп.}}} \Delta R_{kl} + \sum_{\substack{D_i \cap \Gamma \neq \emptyset \\ R_{kl} \cap \Gamma \neq \emptyset}} \Delta R_{kl} \right) \leq 2 M_0 \sum_{\substack{R_{kl} \cap \Gamma \neq \emptyset \\ \text{т.е. пр. } \Gamma \text{ имеет} \\ \text{плотность } 0}} \Delta R_{kl} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} 0$$

$M_0 = \sup |f(x, y)|$

$$\delta \rightarrow 0, \tilde{\delta} \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{\sigma}(f) \rightarrow I \Rightarrow \sigma(f) \rightarrow I$$

② $\mathcal{D}$ -мн, что из 1^{ого} сгр. $\Rightarrow$ 2^{ое} (общее) сгр.

$\mathcal{D}$ -то: $\forall \tilde{T}$ -разб. $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_i$: $\tilde{\sigma}(f) \xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} I$ - гл. шг. по 1^{ому} сгр.

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i, \tilde{\delta}, \tau, p_i \in \mathcal{D}_i, \tilde{\sigma}(f)$$

$$\tilde{M}_i = \sup_{\mathcal{D}_i} f(x, y), \tilde{m}_i = \inf_{\mathcal{D}_i} f(x, y)$$

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^n \tilde{M}_i \circ \mathcal{D}_i, \tilde{J} = \sum_{i=1}^n \tilde{m}_i \circ \mathcal{D}_i$$

$$\tilde{J} \leq \tilde{\sigma}(f) \leq \tilde{S} \Rightarrow \text{гол. гол-то: } \tilde{J}, \tilde{S} \xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} I$$

$$\mathcal{D}\text{-мн, что } \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{T}\text{-разб. } \mathcal{D} : |\tilde{S} - I| < \varepsilon, |\tilde{J} - I| < \varepsilon$$

1) Закладываем $\mathcal{D}$ в пр-к R , $\forall R \parallel OX, \parallel OY$

$$F = \begin{cases} f, \mathcal{D} \\ 0, R \setminus \mathcal{D} \end{cases}$$

Разбиваем R на $R_k, k = \overline{1, n}, T, \Delta$:

$$1) S - J < \varepsilon/2 \text{ (из т. 1 } \Rightarrow \text{ это возможно)}$$

$$2) \sum_k \Delta R_k < \frac{\varepsilon}{12M_0} \text{ (} \Delta \Gamma = 0 \Rightarrow \text{ это возможно), } M_0 = \sup_{\mathcal{D}} |f(x, y)|$$

Обозн. мн-во линий разбиения в T через Γ_T

2) Закладываем мн-во линий разб. Γ_T строго внутри элемен. фигуры Q так чтобы $\Delta Q < \frac{\varepsilon}{12M_0}$

$$\Gamma_T \subset Q \Rightarrow \exists \delta = \inf_{\substack{\forall M \in \Gamma_T \\ N \in \partial Q}} \rho(M, N) > 0$$

3) Разбиваем $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_i, i = \overline{1, 2}$ так чтобы $\tilde{\delta} < \delta$ ($\delta_i < \delta, \forall i$)

$$\tilde{T}, \tilde{\delta}, \forall \tau, p_i(\xi_i, \eta_i) \in \mathcal{D}_i, \tilde{\sigma}(f), \tilde{J}, \tilde{S}$$

$$\mathcal{D}\text{-мн, что } \tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{4}, \tilde{J} > J - \frac{\varepsilon}{4}$$

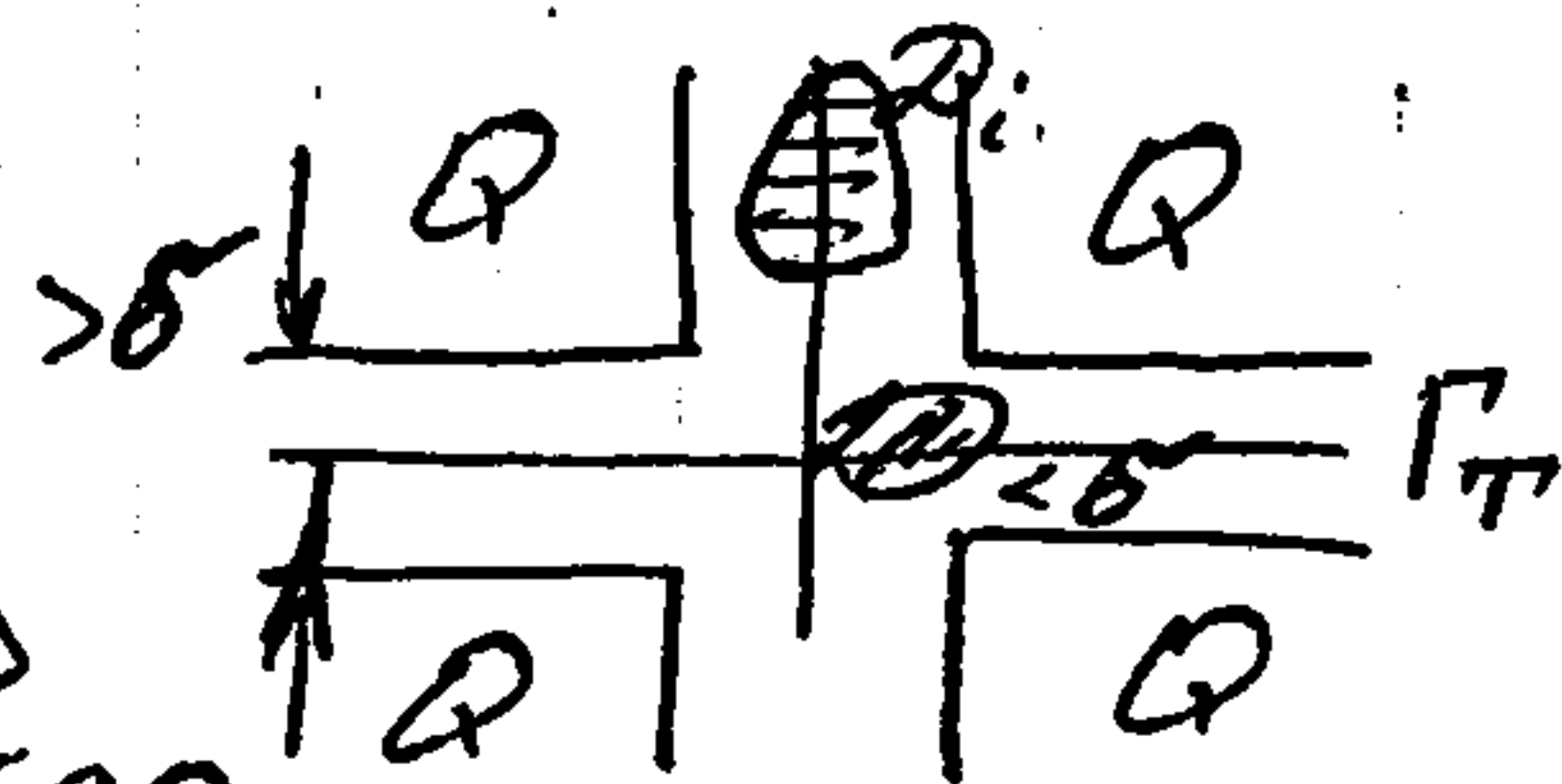
Док. что $\tilde{S}$, где $\tilde{J}$ аналогично.

$\Delta \tilde{S}$, отбросим из нее самые маленькие, отвечающие $\mathcal{D}_i$:

$\mathcal{D}_i \cap \Gamma_T \neq \emptyset$. Сумму оставшихся самых маленьких обзн.

$$\sum_i \tilde{M}_i \circ \mathcal{D}_i$$

$$\text{т.к. } \tilde{\delta} < \delta, \text{ а расст. } \partial Q \text{ и } \Gamma_T > \delta \Rightarrow \Rightarrow \text{ все эти } \mathcal{D}_i \subset Q \Rightarrow \sum_i \mathcal{D}_i \subset Q$$



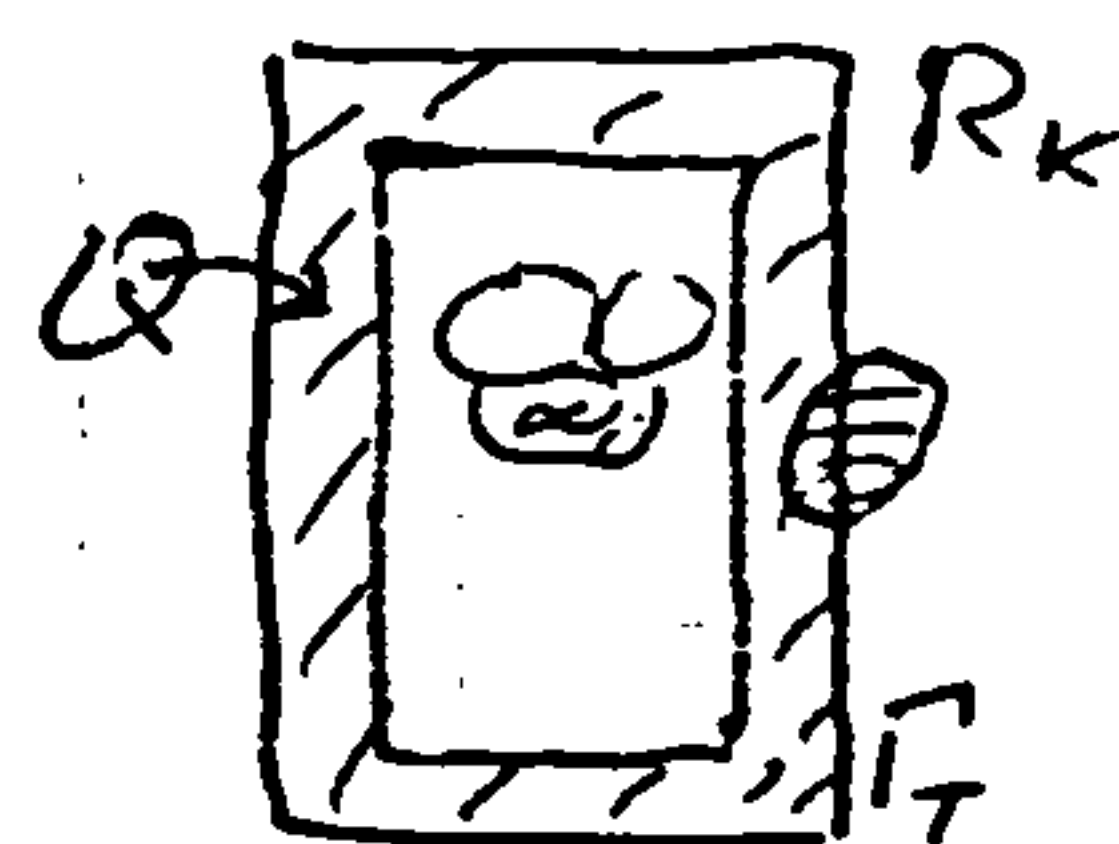
$$|\tilde{S} - \sum_i' \tilde{M}_i \circ \mathcal{D}_i| \leq M_0 \sum_{\mathcal{D}_i \cap \Gamma \neq \emptyset} \circ \mathcal{D}_i < M_0 \circ Q < M_0 \cdot \frac{\varepsilon}{12M_0} = \frac{\varepsilon}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{S} < \sum_i' \tilde{M}_i \circ \mathcal{D}_i + \frac{\varepsilon}{12} \quad (1) \quad \left(\tilde{S} > \sum_i' \tilde{M}_i \circ \mathcal{D}_i - \frac{\varepsilon}{12} \right)$$

$$\Delta R_k : R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$$

Объём, оставшихся в R_k частей $\mathcal{D}_i$ обозн.

$$\tilde{R}_k (R_k \setminus \tilde{R}_k \subset Q)$$



$$\tilde{M}_i \leq M_k = \sup_{R_k} F(x, y) \quad k = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow \sum_i' \tilde{M}_i \circ \mathcal{D}_i \leq \sum_{\substack{k \\ R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset}} M_k \circ \tilde{R}_k$$

$$S = \sum_{k=1}^n M_k \circ R_k = \sum_{\substack{k \\ R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset}} M_k \circ R_k$$

$$\text{Сравним } S \text{ и } \sum_{\substack{k \\ R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset}} M_k \circ \tilde{R}_k$$

$$|S - \sum_{\substack{k \\ R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset}} M_k \circ \tilde{R}_k| = \left| \sum_{\substack{k \\ R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset}} M_k \circ R_k - \sum_{\substack{k \\ R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset}} M_k \circ \tilde{R}_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{\substack{k \\ R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset}} M_k \circ (R_k \setminus \tilde{R}_k) \right| \leq M_0 \sum_{\substack{k \\ R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset}} \circ (R_k \setminus \tilde{R}_k) = (\circ R_k - \circ \tilde{R}_k = \circ (R_k \setminus \tilde{R}_k))$$

$$= M_0 \left(\sum_{\substack{k \\ R_k \cap \Gamma \neq \emptyset}} \circ (R_k \setminus \tilde{R}_k) + \sum_{R_k \subset \mathcal{D}} \circ (R_k \setminus \tilde{R}_k) \right) \leq$$

$$\leq M_0 \left(\sum_{\substack{k \\ R_k \cap \Gamma \neq \emptyset}} \circ R_k + \sum_{\substack{k \\ R_k \subset \mathcal{D}}} \underbrace{\circ (R_k \setminus \tilde{R}_k)}_{\substack{2) \text{ упр.} \\ \text{посл. Т}}} \underbrace{\circ Q}_{< \circ Q} \right) < M_0 \left(\frac{\varepsilon}{12M_0} + \circ Q \right) <$$

$$< M_0 \left(\frac{\varepsilon}{12M_0} + \frac{\varepsilon}{12M_0} \right) = \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow \sum_{\substack{k \\ R_k \cap \mathcal{D} \neq \emptyset}} M_k \circ \tilde{R}_k < S + \frac{\varepsilon}{6},$$

$$\text{перенесём в оценку (1)} \Rightarrow \tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{12} = S + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{4}, \quad \tilde{S} > S - \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{аналог})$$

Т.к. по упр. 1) посл. Т $S - S < \varepsilon/2$, то комбинируя эти оценки

ошибка от I меньше или на $\varepsilon/2$, то из полученных оценок $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |\tilde{S} - I| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad \exists \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{S}, \tilde{S} = I$$

§2. Основные свойства двойного интеграла (док-ты аналогично одностор. случаю)

D - орг. замкн. квадратичное мн-во на пл-ти E^2

f, g - ф-ции $f(x, y), g(x, y)$ интегр. на D .

Св-во 1. (Аддитивность)

Пусть D разбито кривой γ на две части, не имеющие общих внутр. точек $\Rightarrow$

$f(x, y)$ интегр. по D_1 и по D_2 :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \quad (\text{верно и обратное})$$

Св-во 2. (Линейность)

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ - интегр. на D :

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$$

Св-во 3. $|f|$ - интегр. на D : $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$
(обратное не верно)

Св-во 4. $f \cdot g$ - интегр. на D

Св-во 5. Если $f \leq g$ на D , то $\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$

Св-во 6. (Теорема о среднем значении)

Пусть g - сохраняет знак на D ,
 m, M - точные грани f на D

Тогда $\exists \tilde{M} \in [m, M]$: $\iint_D f g d\sigma = \tilde{M} \iint_D g d\sigma$

Если f - непрерыв. на D , а D - связное мн-во, то

$\exists P(x, y) \in D$: $\tilde{M} = f(P)$ $\iint_D f g d\sigma = f(P) \iint_D g d\sigma$

Св-во 7. $\iint_D 1 dx dy = \sigma D$ - площадь D

§3. Вычисление двойных интегралов

Лекция № 18
1.11.10

1° Случай прямоугольного множества.

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

Теорема 6. Пусть f - икт-ма на R
 $\forall x \in [a, b] \exists$ икт. $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ Тогда $\exists$ повсрхний интеграл:

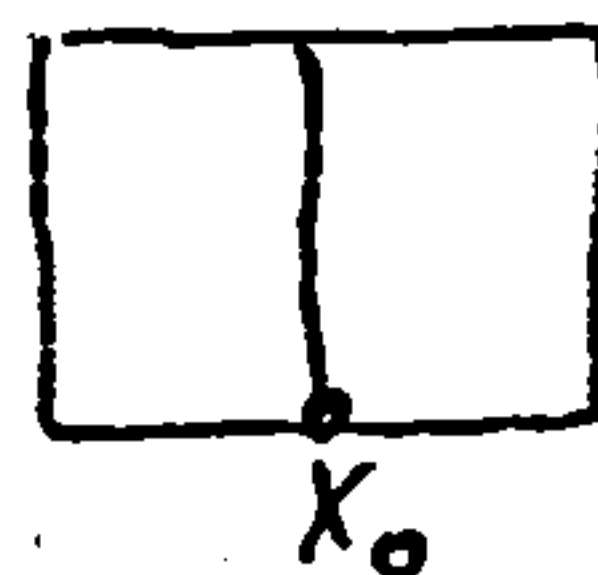
$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

и справедливо равенство:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (1)$$

Замечание. 1. Если $f(x, y)$ непрер. на R , то уик. теорема выполняется.2. Из $\exists \iint_R f dx dy \not\Rightarrow \exists \int_c^d f(x, y) dy$

$$f = 0 \text{ на } R \setminus (x = x_0)$$

на сгр. f - гр-чис Дирихле

Док-во:

Разбиение $R \sim T$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_p = d$$

пр пр-ка R_{ke} $k = \overline{1, n}$, $\ell = \overline{1, p}$

$$R = \bigcup_{k, \ell} R_{ke} \quad \text{Диаметр разд. } \Delta$$

 f - икт. на $R \Rightarrow$ сгр. на R m_{ke} , M_{ke} - точные грани f на R_{ke}

$$m_{ke} \leq f(x, y) \leq M_{ke}$$

$$\forall (x, y) \in R_{ke}$$

$$\text{Фикс. } x: \forall x = \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$m_{ke} \leq f(\xi_k, y) \leq M_{ke} \quad \Big| \int_{y_{\ell-1}}^{y_\ell} dy$$

$$m_{ke} \cdot \Delta y_\ell \leq \int_{y_{\ell-1}}^{y_\ell} f(\xi_k, y) dy \leq M_{ke} \cdot \Delta y_\ell \quad \Big| \sum_{\ell=1}^p$$

$$\sum_{\ell=1}^p m_{ke} \Delta y_\ell \leq I(\xi_k) \leq \sum_{\ell=1}^p M_{ke} \Delta y_\ell \quad \Big| \cdot \Delta x_k, \sum_{k=1}^n$$

$$J \leq \sum_{k=1}^n I(\xi_k) \Delta x_k \leq S$$

$$\Delta \rightarrow 0 \Rightarrow \max \Delta x_k \rightarrow 0$$

$$\Delta \rightarrow 0 \Rightarrow J, S \rightarrow \iint_R f dx dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n I(\xi_k) \Delta x_k = \int_0^b I(x) dx = \iint_R f(x, y) dx dy$$

Замечание. x и y в т.б. можно поменять местами.

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

1°. Случай произвольного множества.

Теорема 7. Пусть D — о-р., замкн., квадр. или-во

и такое, что $\forall$ прямая $x = x_0$ || Oy пересекает $\partial D = \Gamma$ не более чем в 2-х точках $y_1(x_0) \leq y_2(x_0)$, либо по целому отрезку $[y_1(x_0), y_2(x_0)]$

Пусть $f(x, y)$ интегр. на D (т.е. $\iint_D f(x, y) dx dy$),

$$\forall x \in [x_1, x_2] = \text{пр. } D :$$

$$\exists \text{ инт. } I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

Тогда $\exists$ повторный интеграл $\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ и

$$\text{справедливо р-во: } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (2)$$

D -во: По т. 5 гла. интегр. эквивалентны
Восстановление интегр. через пр-к:

$$\forall R: D \subset R \quad || Ox, || Oy : \quad F(x, y) = \begin{cases} f & \text{на } D \\ 0 & \text{на } R \setminus D \end{cases}$$

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

f — интегр. на $D \Rightarrow F$ — инт. на R

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy - \exists \text{ по } x.$$

Тогда в силу теор. т.б. для F на R $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_R F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy$$

$$\stackrel{|| \text{def}}{=} \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

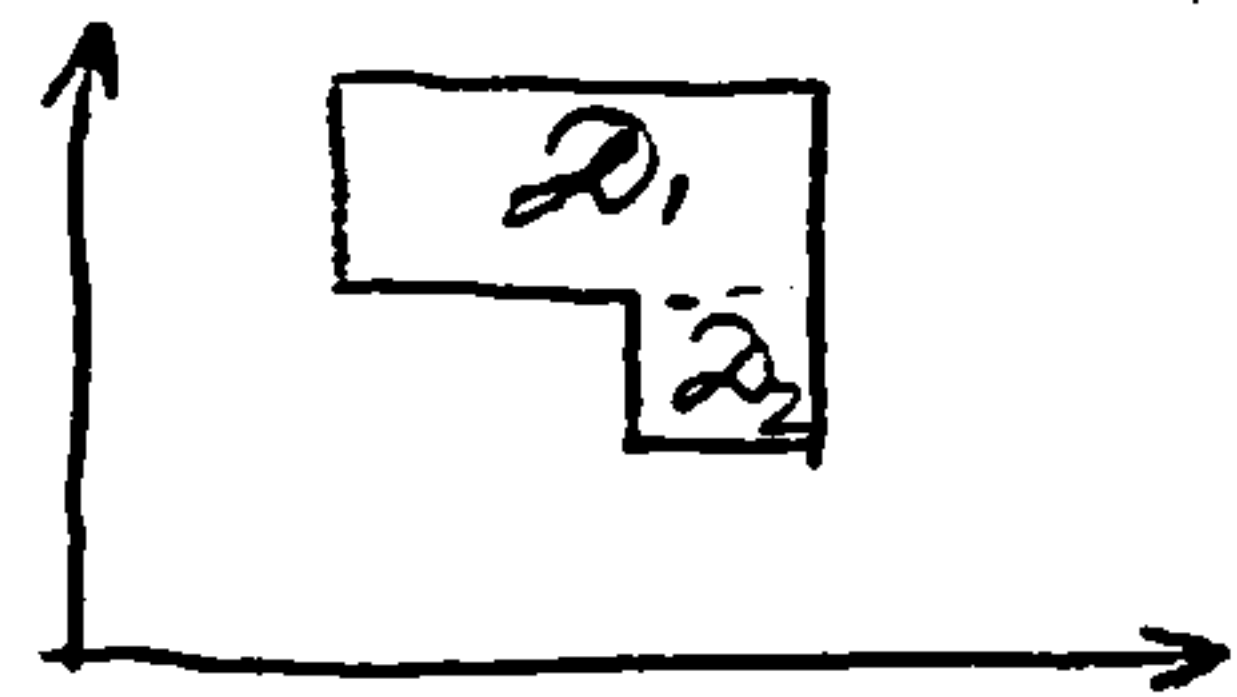
Замечание. 1. x и y можно поменять местами:

$$(2) \sim \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad [y_1, y_2] = \text{пр. } D$$

2. D - может быть таковы, что его можно разбить на конечное число D_i без общих внутр. точек, уровн. упр. $\Rightarrow$ в правых частях (1), (2) будут стоять суммы значений $f(x, y)$ по частям D_i .

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$$



§4. Тройные и n-кратные интегралы.

n-мерное пр-во E^n , $n \geq 3$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$

n-мерн. примит. параллелепипед, стороны $\parallel O x_i$ (брус)

$$R_n = \{x : x_i \in [a_i, b_i], i = \overline{1, n}\} = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

n-мерный объем бруса $V_n(R_n) =$ произведение длин ребер, исходящих из одной вершины: $V_n(R_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Пусть $D = D_n$ - огранич. замкнутое мн-во в E^n .

Назовем элементарным телом объединение конечного числа брусков, не имеющих общих внутр. точек. Q_n

Назовем n-мерным объемом мн-во D_n на $\sup$ n-объемов элем. тел, содержащихся в D_n :

$$\underline{V}_n = \sup_{Q_n \subset D_n} V_n(Q_n), \quad V_n(Q_n) - \text{сумма } n\text{-объемов брусков, составл. } Q_n$$

$$\text{Верхний объем } D_n: \quad \bar{V}_n = \inf_{Q_n \supset D_n} V_n(Q_n)$$

Если $\underline{V}_n = \bar{V}_n = V_n(D_n)$ - n-мерный объем D_n , D_n наз. нударусимым.

D_n имеет n-мерн. объем нуль, если $\forall \varepsilon > 0 \exists Q_n \supset D_n : V_n(Q_n) < \varepsilon$

Лем. 1. Для того чтобы D_n было нударусимым $\Leftrightarrow \exists Q_{n_1}, Q_{n_2} :$

$$Q_{n_1} \subset D_n \subset Q_{n_2} : V_n(Q_{n_2}) - V_n(Q_{n_1}) < \varepsilon.$$

$f(x)$ на R_n , разб. T

$$\sigma(f), \quad \Delta_n \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \sigma(f) = I = \int \dots \int_{R_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{R_n} f(x) d\sigma$$

f -непрер. и обм. I св-ам на R_n имеем.

$$\forall \mathcal{D}_n \subset E^n \quad \forall R_n : \mathcal{D}_n \subset R_n \quad F = \begin{cases} f, & \text{на } \mathcal{D}_n \\ 0, & \text{на } R_n \setminus \mathcal{D}_n \end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{D}_n} f dx = \int_{R_n} F dx$$

$\mathcal{D}_n$ - разд. конечно числом многообразий n -мерн. объема $\mathcal{O}$ на $\mathcal{D}_n$

$$\tilde{T}, \tilde{\Delta}_n, \tilde{\sigma}(f) \xrightarrow{\tilde{\Delta}_n \rightarrow 0} I = \int_{\mathcal{D}_n} f(x) dx - n\text{-кратный интеграл от } f \text{ по } \mathcal{D}_n$$

Теорема 5*, 6*, 7*.

Ув 2. Пусть $\mathcal{D}_n$ - огранич. замкнут. кубич. мн-во такое, что $\forall$ пр. 110

пересекает $\partial \mathcal{D}_n$ не более чем в их точках $\overset{a, b}{\dots}$, либо по отрезку $[a, b]$
 $\mathcal{D}_{n-1} = \text{пр. } \mathcal{D}_n$

Пусть f непрерывна по $\mathcal{D}_n$ $\forall (x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_{n-1}$:

$$\exists \int_{a(x_2, \dots, x_n)}^{b(x_2, \dots, x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1$$

Тогда $\exists (n-1)$ -кратный интеграл $\iint \dots \int_{\mathcal{D}_{n-1}} dx_2 \dots dx_n \int_{a(x_2, \dots, x_n)}^{b(x_2, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$

$$\text{и } \iiint_{\mathcal{D}_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \iint_{\mathcal{D}_{n-1}} dx_2 \dots dx_n \int_{a(x_2, \dots, x_n)}^{b(x_2, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$$

$$\iiint_{\mathcal{D}_n} 1 dx_1 \dots dx_n = V_n(\mathcal{D}_n)$$

§ 5. Формула замены переменных в n -кратном интегрировании.

$$n=1 \quad \int_a^b f(y) dy = \int_a^b \left\{ \begin{matrix} y = \varphi(x) \\ \exists \varphi'(x) \end{matrix} \right\} = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

$$n=2 \text{ - ?} \quad \text{от } y = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{к переим. } \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \varphi(x) \quad \begin{matrix} y \in \mathcal{D} \\ x \in \mathcal{D}' \end{matrix} \quad \mathcal{D} = \varphi(\mathcal{D}')$$

$$\exists \varphi^{-1} \quad \mathcal{D}' = \varphi^{-1}(\mathcal{D})$$

Ф-ции (1) имеют непрерыв. пр-ые 1-го порядка по $x_1, \dots, x_n$

$$\text{Матрица Якоби: } \left\{ \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\} = J_\varphi$$

$$\text{якобиан} \quad \det J_\varphi = \frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)} = \frac{\mathcal{D}(y_1, \dots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Теорема 8. Пусть отображ. (1) явл. биекционным отображ. D' на D ,
 ф-ция (1) имеет непрерыв. частн. производ. 1-го пор.
 по всем переменным и якобиан отображ. (1) отличен
 от 0 на D'

Пусть $f(y)$ к-л. на D

Тогда справедлива след. ф-ла замены переи.:

$$\int_D f(y) dy = \int_{D'} f(\psi(x)) \left| \frac{D(y)}{D(x)} \right| dx$$

$$\iint_D f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \int_{D'} f(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n)) \cdot \left| \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \dots dx_n$$

§6. Вычисление объёмов n -мерных тел

D - отк. замкн. кривр. мн-во в E^n

$$\iint_D 1 dy_1 \dots dy_n = V_n(D) - n\text{-мерный объём } D$$

$dv = dy_1 \dots dy_n$ - элемент объёма в прямых декарт. сист. коорд.
 $Oy_1, \dots, Oy_n$

$$y = \psi(x), x \in D$$

$$\iint_D 1 dv = \int_{D'} \left| \frac{D(y)}{D(x)} \right| dx$$

$$dv = \left| \frac{D(y)}{D(x)} \right| dx - эл-нт объёма в сист. $Ox_1, \dots, Ox_n$ - кривая сист. коорд.$$

1° Цилиндрические системы координат в E^3

$$r = |\vec{OM}| \geq 0$$

$$\varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM}) \in [0, 2\pi)$$

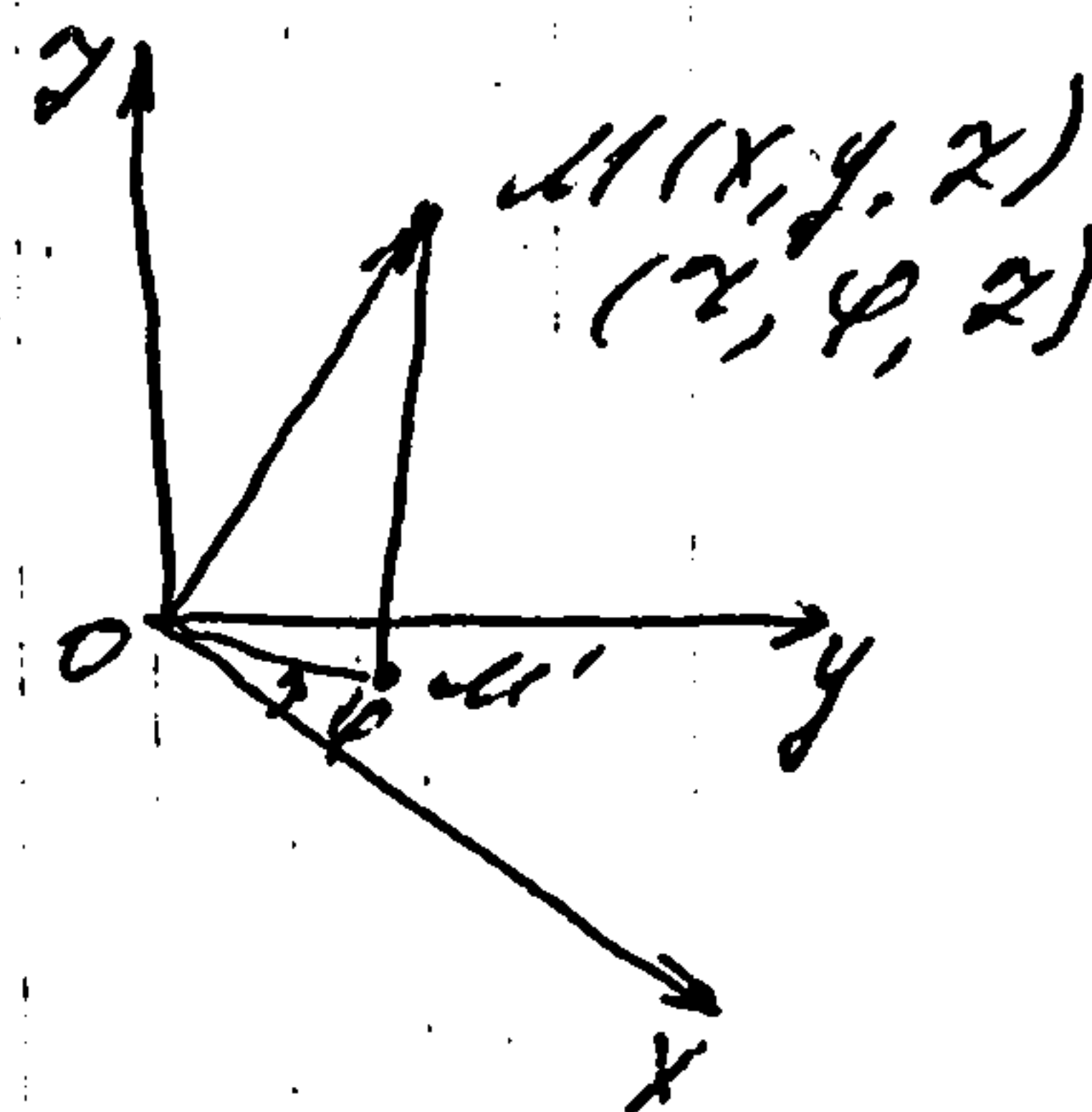
$$z = z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\det J_\psi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$dv = r dr d\varphi dz$ - эл-нт объёма в цилиндрич. сист. коорд.
 если $r=0$ - ось Oz - исключена сист. коорд. на мн-ве:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ \det J_\psi = r \end{cases}$$



2° Сферическая система координат в E^3

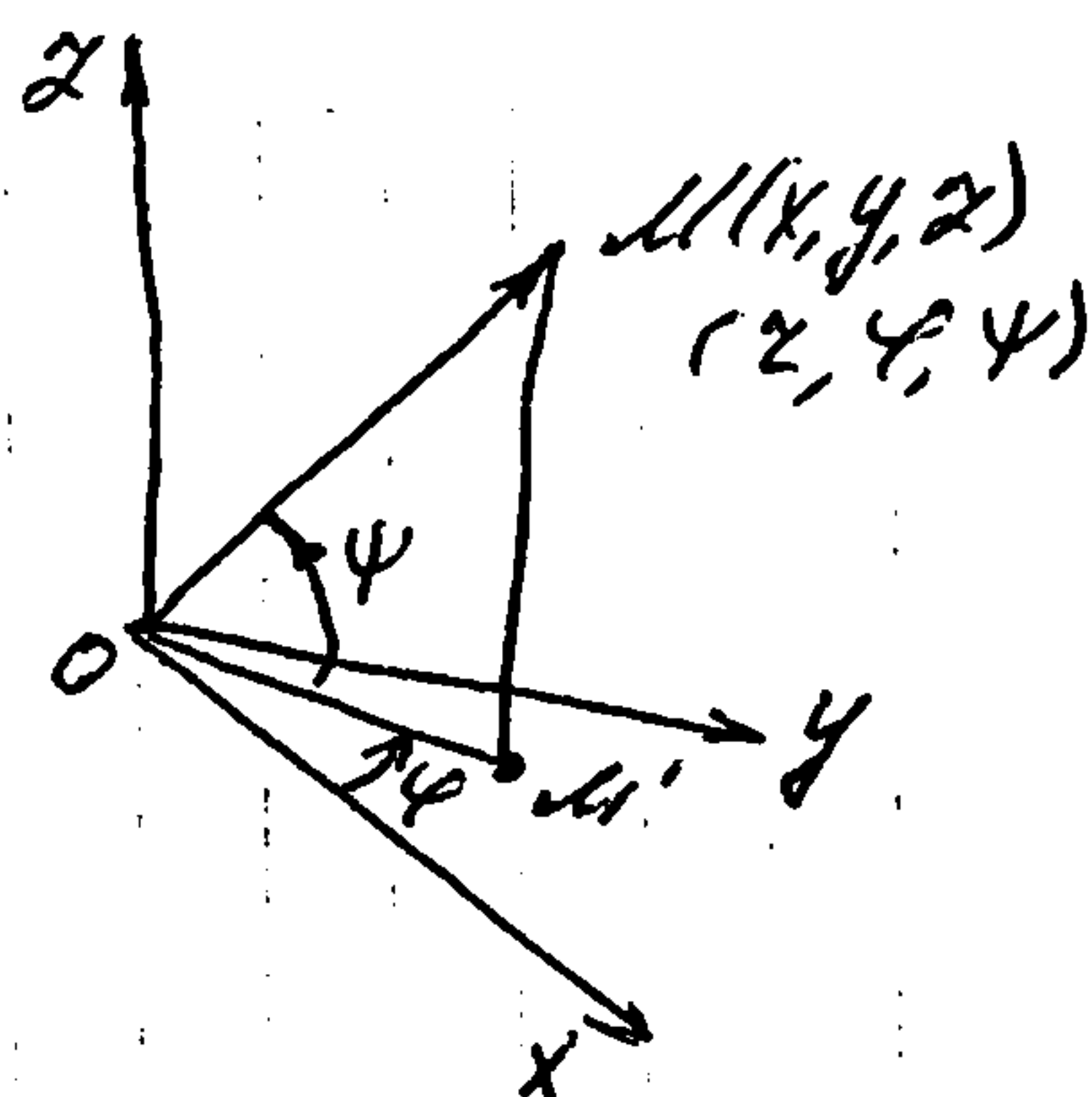
Лекция N 19
3. 11.10

I

$$r = |\vec{r}| \geq 0$$

$$\varphi = (\vec{Ox}, \vec{O\mu'}) \in [0, 2\pi)$$

$$\psi = (\vec{O\mu'}, \vec{Or}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d\ell J_\psi &= r^2 \cos \psi \\ dr &= r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi \end{aligned}$$

II

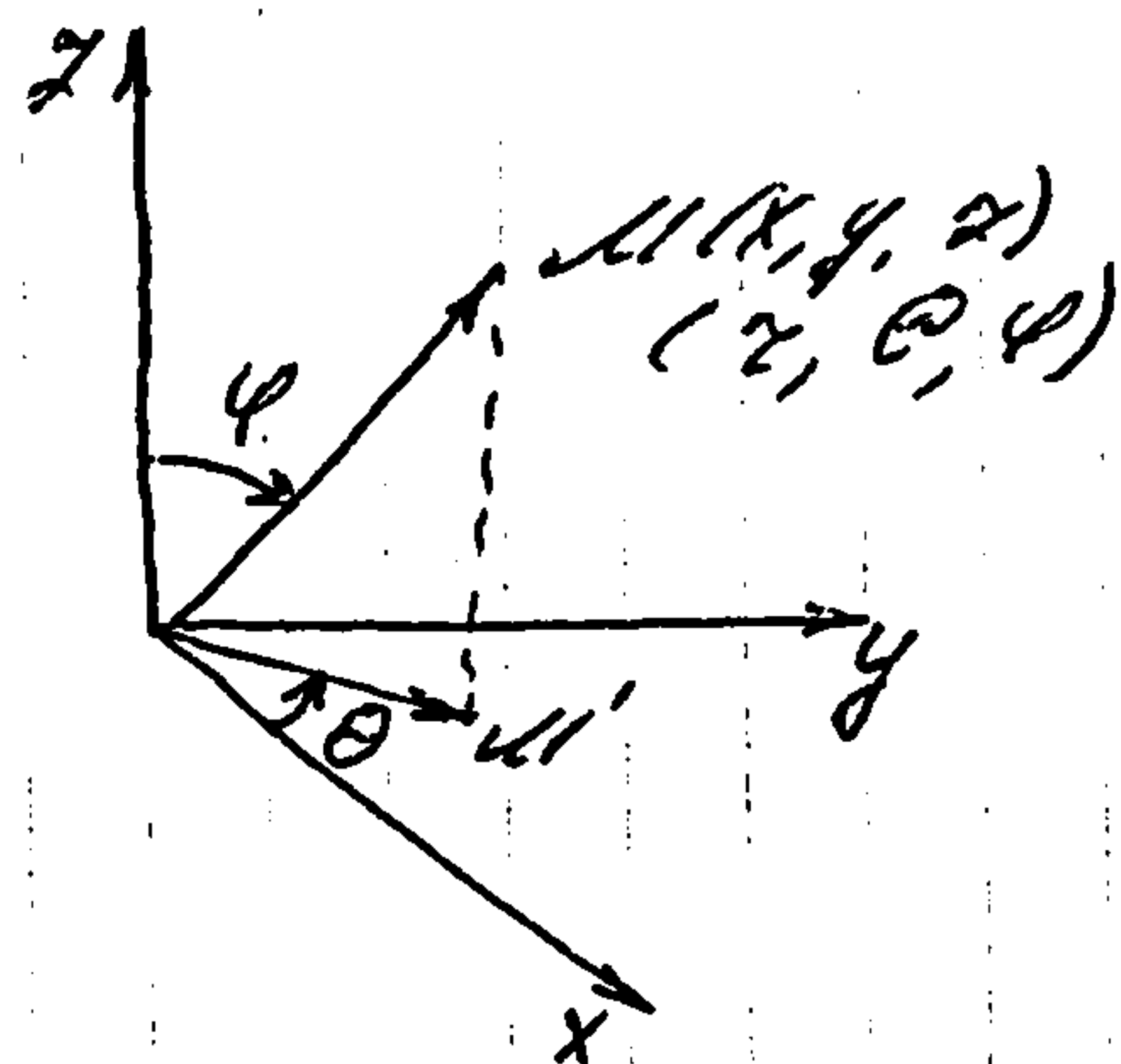
$$r = |\vec{r}| \geq 0$$

$$\theta = (\vec{Ox}, \vec{Or}) \in [0, \pi)$$

$$\varphi = (\vec{Oz}, \vec{O\mu'}) \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d\ell J_\varphi &= -r^2 \sin \theta \\ dr &= +r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$



E^n - евклид. $\forall n \geq 3$

Глава 4. Крайние несобственные интегралы.

$E^n, n \geq 2$ Δ открытое выпуклое мн-во $D \subset E^n$

Опр. Последовательность связных открытых мн-в $\{D_\ell\}$ монотонно исчерпывает мн-во D , если выполняются 3 упр.:

1) Замыкание D_ℓ : $\bar{D}_\ell$ - огранич. кудрируемое мн-во, $\bar{D}_\ell \subset D$

2) $\bar{D}_\ell \subset D_{\ell+1}$ - монотонность расширения, $\forall \ell$

3) Для $\forall$ компакта $K \subset D$ $\exists$ номер $L: K \subset D_L, D_L \in \{D_\ell\}$

$$(\Rightarrow \forall \ell \in \mathbb{N} \quad K \subset D_\ell \Rightarrow \bigcup_{\ell=1}^{\infty} D_\ell = D)$$

Общ. $\{D_\ell\} \subset D$ - монотонно исчерп. D .

Примеры.

$$D = E^2$$

$$D_\ell = \{(x, y): x^2 + y^2 < \ell^2\}, \ell = 1, 2, \dots$$

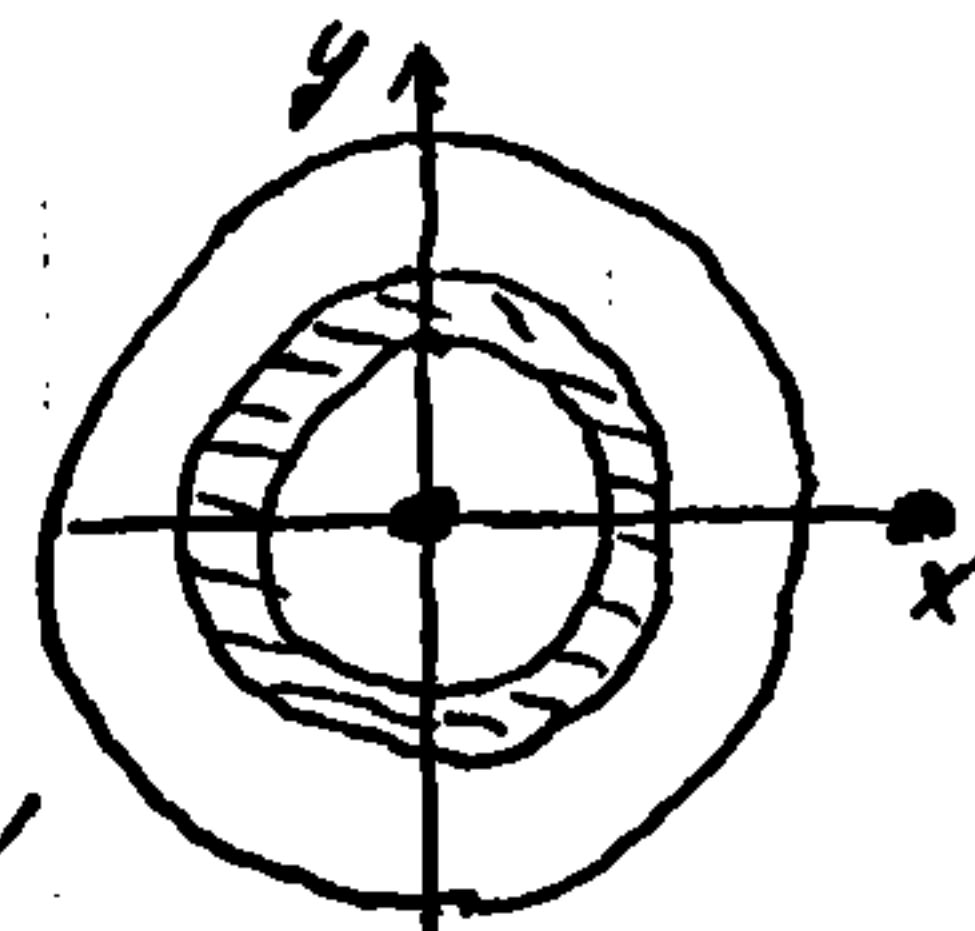
$$D_\ell = \{(x, y): |x| + |y| < \ell\}, \ell = 1, 2, \dots$$

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D_\ell = \{(x, y): x^2 + y^2 < (1 - \frac{1}{\ell+1})^2\}, \ell \in \mathbb{N}$$

$$D = \{(x, y): 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D_\ell = \{(x, y): (\frac{1}{\ell+1})^2 < x^2 + y^2 < (1 - \frac{1}{\ell+1})^2\}, \ell \in \mathbb{N}$$



$f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, определена на D и интегр. (в собственном смысле по Риману) на $\forall$ отрез. куб. подмн-ве D .

Выбираем $\forall \{D_\ell\} \subset D$

Опр. Ф-ция $f(x)$ наз. интегрируемой (в несобственном смысле) на D , если $\exists$ конеч. предл. числовой посл. $\{a_\ell\}$, $a_\ell = \int_{D_\ell} f(x) dx$ (1), и этот предл. не зависит от выбора $\{D_\ell\} \subset D$.

Этот предл. называется кратным несобственным интегралом от f по D .

Одн.
$$I = \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = \int_D f(x) dx = \int \dots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2)$$

Т.к. инт. (2) опре. чрез собств. инт. (1), то осн. св-ва собств. интеграла сохраняются (линейность, аддитивность).

1. Несобственные интегралы от неотрицательных ф-ций

Теорема 1. Для того чтобы несобств. инт. (2) от неотр. ф-ции $f(x)$ на D существовал, $\Leftrightarrow$ чтобы хотя бы при одном выборе $\{D_\ell\} \subset D$ соотв. посл. $\{a_\ell\}$ (1) была ограниченной.

Д-во: $\Rightarrow$ $\exists$ инт. (2) ск-во $\Rightarrow \exists \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell, \forall \{D_\ell\} \subset D \Rightarrow$
 $\Rightarrow \{a_\ell\}$ - отр. $\forall \{D_\ell\} \subset D$.

$\Leftarrow$ $\exists \{D_\ell\} \subset D : \{a_\ell\}$ - отр.

Т.к. $\{a_\ell\}$ - не убывает ($f \geq 0, \overline{D_\ell} \subset D_{\ell+1} \Rightarrow a_{\ell+1} \geq a_\ell$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = I$

Выбираем $\forall$ другую $\{D'_\ell\} \subset D$. Очев. $\{a'_\ell\}$

Д-ем, что $\exists \lim_{\ell \rightarrow \infty} a'_\ell = I$ ($\Rightarrow$ (2) ск-во)

Фикс. $\forall D'_\ell \in \{D'_\ell\}$

По св-ву 3) мы опре. $\{D_\ell\} \subset D$ для каждого $D'_\ell \exists D_\ell \in \{D_\ell\}$:

$\overline{D'_\ell} \subset D_\ell \xrightarrow{f(x) \geq 0} a'_\ell \leq a_\ell \leq I \Rightarrow a'_\ell \leq I \quad \forall \ell$

$\{a'_\ell\}$ - отр., монот. не убыв. $\Rightarrow$ ск-во

$\exists \lim_{\ell \rightarrow \infty} a'_\ell = I' \leq I$

Фикс. $\forall D_\ell \in \{D_\ell\}, \exists D'_\ell \in \{D'_\ell\} \quad \overline{D_\ell} \subset D'_\ell$

$I \leq I' \Rightarrow I = I'$

Пример. Интеграл Пуассона

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad - ?$$

$$\iint_{E^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = I = \left\{ \begin{array}{l} x = z \cos \varphi \\ y = z \sin \varphi \\ z > 0, \varphi \in [0, 2\pi] \\ \det J_{\varphi} = z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-z^2} z dz =$$

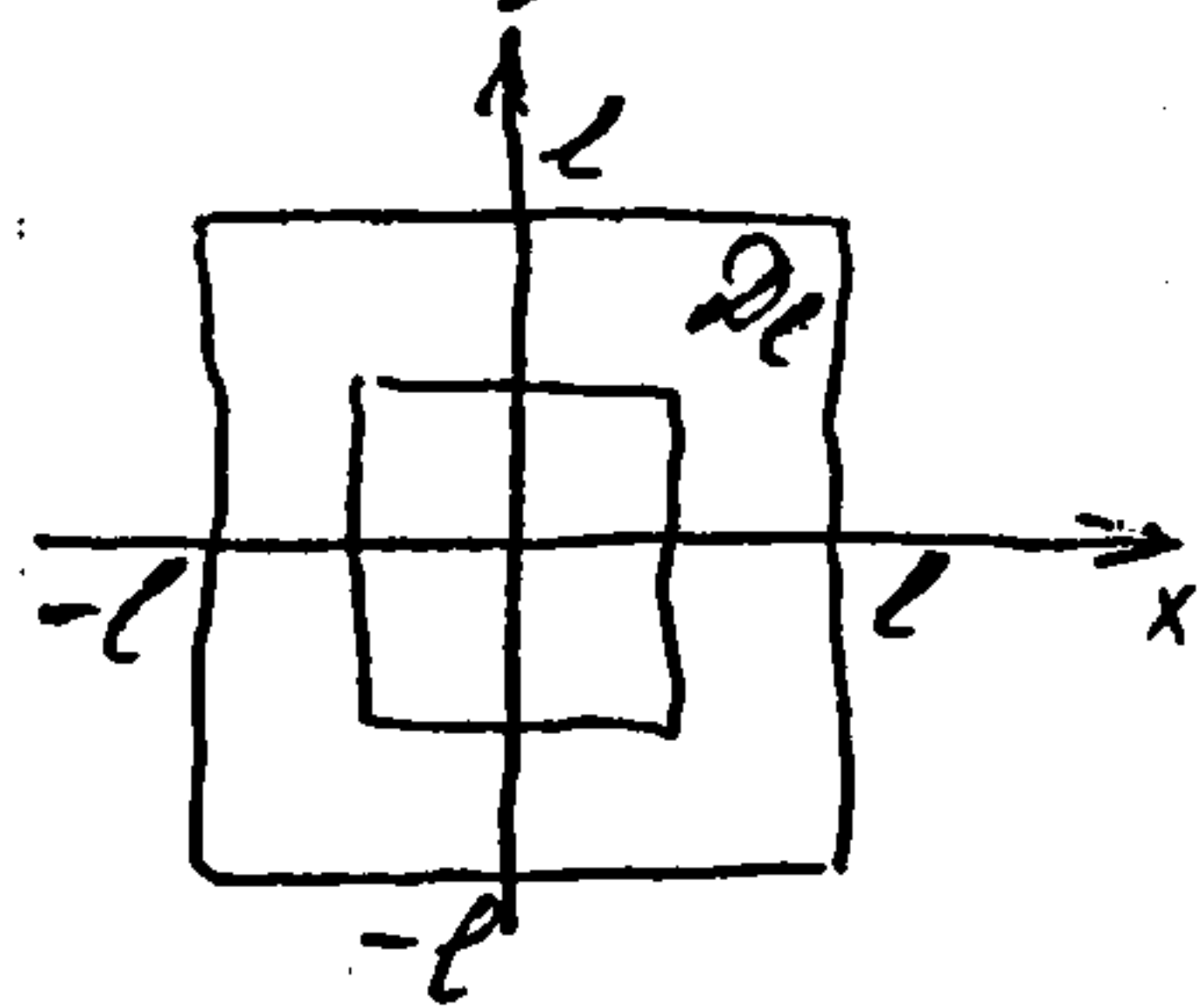
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz^2 = \pi (-e^{-z^2}) \Big|_{z=0}^{+\infty} = \pi (1 - 0) = \pi$$

$\{a_\ell\}$ - с.р. $\xrightarrow{T.I.}$ интеграл с.с. и его значение $I = \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = \pi$

$$I = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\ell}^{\ell} dx \int_{-\ell}^{\ell} e^{-x^2-y^2} dy = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\int_{-\ell}^{\ell} e^{-x^2} dx \right)^2 =$$

$$= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



Теорема 2 (общий признак сходимости)

Ф-ции $f(x), g(x)$ определены и неотрицательны на D

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$$

Тогда из с.с. $\int_D g dx \Rightarrow$ с.с. и. (2)

из расх.т. (2) $\Rightarrow$ расх.т. $\int_D g dx$

Д-во: 1-е утв. $\Rightarrow$ из 1-го: если (2) расх., а $\int_D g dx$ - с.с., то из 1-го утв.

(2) с.с., то не так $\Rightarrow \int_D g dx$ - расх.

$\int_D g dx$ - с.с.

Выбираем $\forall \{D_\ell\} \subset D$

$$a_\ell = \int_{D_\ell} f(x) dx \leq \int_{D_\ell} g(x) dx = b_\ell, \quad \forall \ell$$

$$a_\ell \leq b_\ell$$

$\{b_\ell\}$ - с.с. $\Rightarrow \{a_\ell\}$ - с.с. $\xrightarrow{T.I.}$ и. (2) с.с.

2.° Необход. ит. от знакопеременных функций.

Опр. Ит. (2) наз. абсолютно сходящимся, если сходится ит.

$$\int_D |f(x)| dx \quad (3)$$

Теорема 3. Если ит. (2) сх-ся абс., то он сх-ся.

Д-во: Δ вспомог. ф-ция $f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \begin{cases} f, & \text{если } f \geq 0 \\ 0, & \text{если } f < 0 \end{cases}$

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x \in D.$$

$$f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } f \geq 0 \\ -f, & \text{если } f < 0 \end{cases}$$

$$0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$$

Тогда по Т.2. $\Rightarrow \int_D f_+ dx, \int_D f_- dx$ — сх-ся ($g \sim |f|$).

Сравним эти соотношения:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad (4)$$

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \quad (5)$$

Из св-ва линейности интеграла и соотнош. (4) $\Rightarrow$ ит. (2) сх-ся.

Теорема 4. Если ит. (2) сх-ся, то он сх-ся абс. $\forall E^n, n \geq 1$.

Д-во: от противного

$\exists$ ит. (2) сходится, а ит. (3) расх-ся $\stackrel{Т.1}{\Rightarrow} \forall \{D_\ell\} \subset D$ т.ч. и $\{a_\ell\} \subset \mathbb{R}$

$$a_\ell = \int_{\overline{D}_\ell} |f(x)| dx, \text{ явл. бесконечно большой, } a_\ell \xrightarrow[\ell \rightarrow +\infty]{\ell \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \{D_\ell\} : a_{\ell+1} > 3a_\ell + 4\ell + 1, \quad \forall \ell \geq 1$$

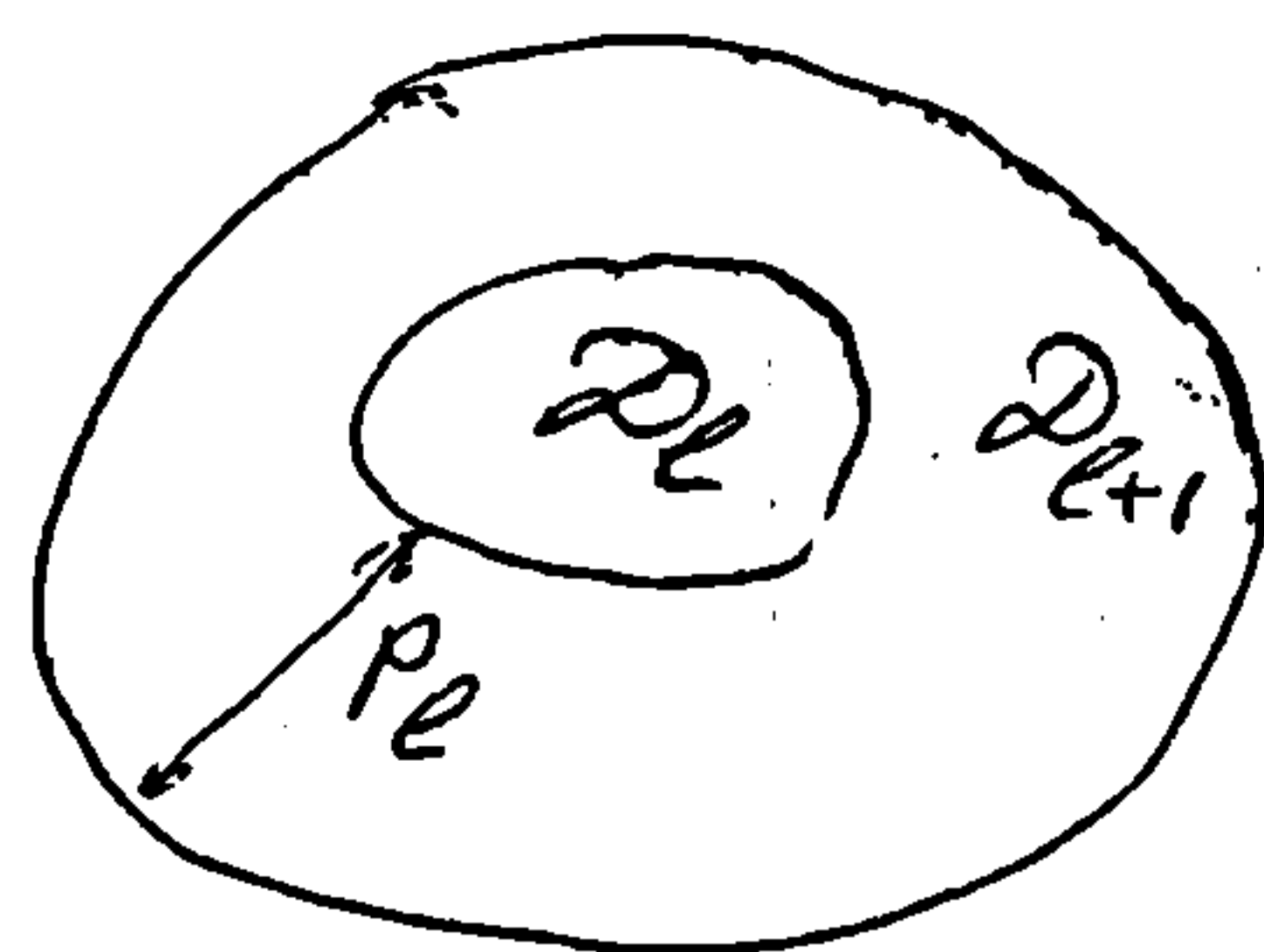
$$(\{D_\ell\}, \ell=2 \quad a_2 > 3a_1 + 4 + 1 \Rightarrow D_2 \text{ обяз.}$$

$$\text{если не } \emptyset, D_3 : a_3 > 3a_2 + 4 + 1 \Rightarrow D_3 \text{ обяз.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ постр. посыл. $\{D'_\ell\} \subset D$ для которых верно пер-во).

$$\int_{\overline{D}_{\ell+1}} |f(x)| dx > 3 \int_{\overline{D}_\ell} |f(x)| dx + 4\ell + 1$$

Обозн. $P_\ell = D_{\ell+1} \setminus \overline{D}_\ell$ — окр. ит-во



Если inequality справа перенесём влево: $\int_{\overline{D}_\ell} |f(x)| dx > 2 \int_{\overline{D}_\ell} |f| dx + 2\ell + 4$

Воспользуемся соотн. (5): $\int_{\overline{D}_\ell} |f(x)| dx = \int_{\overline{D}_\ell} f_+(x) dx + \int_{\overline{D}_\ell} f_-(x) dx$

Факт. $\forall \ell$. Пусть для этого ℓ : $\int_{\overline{D}_\ell} f_+ dx \geq \int_{\overline{D}_\ell} f_- dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\overline{D}_\ell} |f(x)| \leq 2 \int_{\overline{D}_\ell} f_+(x) dx$$

$$2 \int_{\overline{D}_\ell} f_+ dx \geq \int_{\overline{D}_\ell} |f| dx > 2 \int_{\overline{D}_\ell} |f| dx + 2\ell + 4 \quad : 2$$

$$\int_{\overline{D}_\ell} f_+ dx > \int_{\overline{D}_\ell} |f| dx + \ell + 2$$

Лекция № 20
8.11.10

Формула замены переменной в кратном несобственном интеграле.
Пусть $f(y)$ непрерывна на D -откр., связн. мн-во

$$y = \psi(x) \quad x \in D' : D = \psi(D')$$

Пусть выполнены все усл. Т.8, где вместо отрезка D следует в отк. от D

$\forall \{D_0\} \subset D \Rightarrow$ на $\overline{D_0}$ выполн. усл. Т.8

$$\int_{\overline{D_0}} f(y) dy = \int_{\overline{D_0'}} f(\psi(x)) |\det J_\psi(x)| dx$$

$\Leftrightarrow \exists$ предел любой части $\Rightarrow \exists$ предел пр. части:

$$\int_D f(y) dy = \int_{D'} f(\psi(x)) |\det J_\psi(x)| dx$$

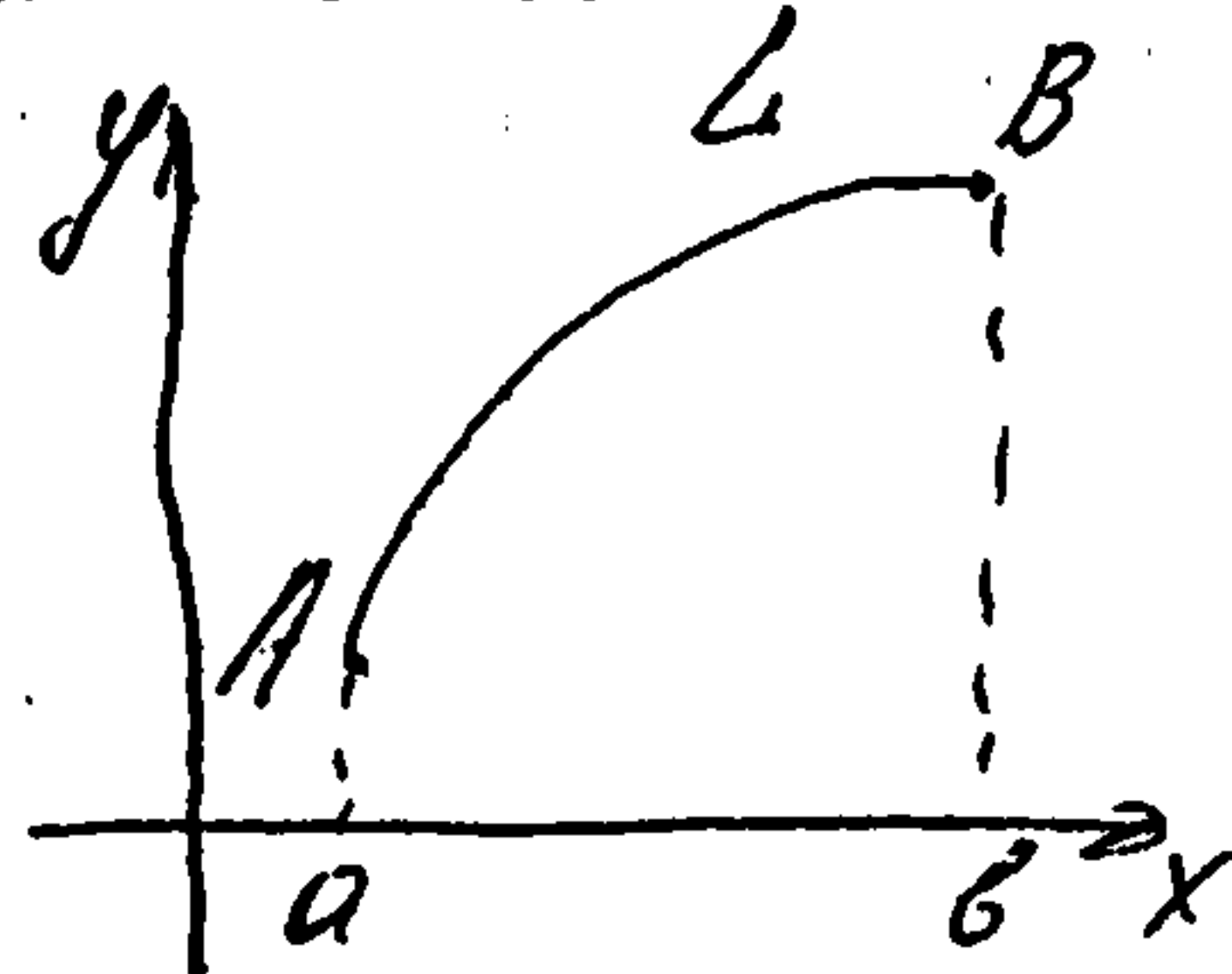
Глава 5. Криволинейные интегралы

L - простая спрямляемая нумерованная кривая на плоскости Oxy ,
огранич. точками A, B описываемая параметр. уравнением:
без точек самоперес. и самокасания.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$$A(\varphi(a), \psi(a))$$

$$B(\varphi(b), \psi(b))$$



Разбиваем отрез. $[a, b]$ на конечн. число частей

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, [t_{k-1}, t_k]$$

$$\forall t_k \rightarrow M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k)) \quad L = \bigcup_{k=1}^n \cup M_{k-1} M_k$$

Разделение кривой L на конечн. дуги $\cup M_{k-1} M_k$

$$\Delta L_k = |\cup M_{k-1} M_k| - \text{длина дуги } \cup M_{k-1} M_k = \Delta L_k$$

$$(\text{для гладкой кривой } L : \Delta L_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

$$\Delta = \max_k \Delta L_k - \text{диаметр разбиения}$$

Пусть на L заданы 3 ф-ции $f(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ непрерыв. на L :

$$f: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall M_1, M_2 \in L : \rho(M_1, M_2) < \delta \quad |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$$

выберем $\forall M_k(\xi_k, \eta_k) \in \cup M_{k-1} M_k$ её ближайшей к началу отсчета

$$\xi_k \in [t_{k-1}, t_k] : \xi_k = \varphi(\xi_k), \eta_k = \psi(\xi_k)$$

Интегральные суммы:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k \\ \sigma_2 &= \sum_{k=1}^n p(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k \\ \sigma_3 &= \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k \end{aligned}$$

Опр. Число I_s , $s=1,2,3$ наз. пределом интегральных сумм $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соотв.,
если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \delta : |I_s - \sigma_s| < \varepsilon$ при $\Delta \rightarrow 0$ независимо от выбора точек $M_k \in \nu_{M_{k-1}, M_k}$

Опр. Если $\exists$ предел I_1 интегральной суммы σ_1 при $\Delta \rightarrow 0$, то он наз. криволинейным интегралом 1-го рода от функции f по кривой L

$$I_1 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_1 = \int_L f(x, y) d\ell$$

из опр. $\Rightarrow$, что интеграл 1-го рода не зависит от напр. движения по кр. L

Физический смысл.

Пусть вдоль L распредел. масса с плотн. $f(x, y)$
Разбив. на части вдоль ν_{M_{k-1}, M_k} $f(x, y) \approx \text{const} \Rightarrow f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k$ - масса дуги ℓ_k

$\sigma_1 \approx$ масса L

$I_1 =$ масса L

Опр. Если $\exists$ пределы I_2, I_3 интегральных сумм σ_2, σ_3 при $\Delta \rightarrow 0$, то они наз. криволинейными интегралами 2-го рода от функций P, Q по кривой AB

$$I_2 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_2 = \int_{AB} P(x, y) dx, \quad I_3 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_3 = \int_{AB} Q(x, y) dy$$

$$I = \int_{AB} P dx + \int_{AB} Q dy = \int_{AB} (P dx + Q dy) - \text{общий интеграл 2-го рода по кр. } AB$$

из опр. $\Rightarrow$, что при изменении напр. движения по кр. L общий криволинейный интеграл 2-го рода не меняется, только знак на противоположный.

Физический смысл

$$\vec{F} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$$

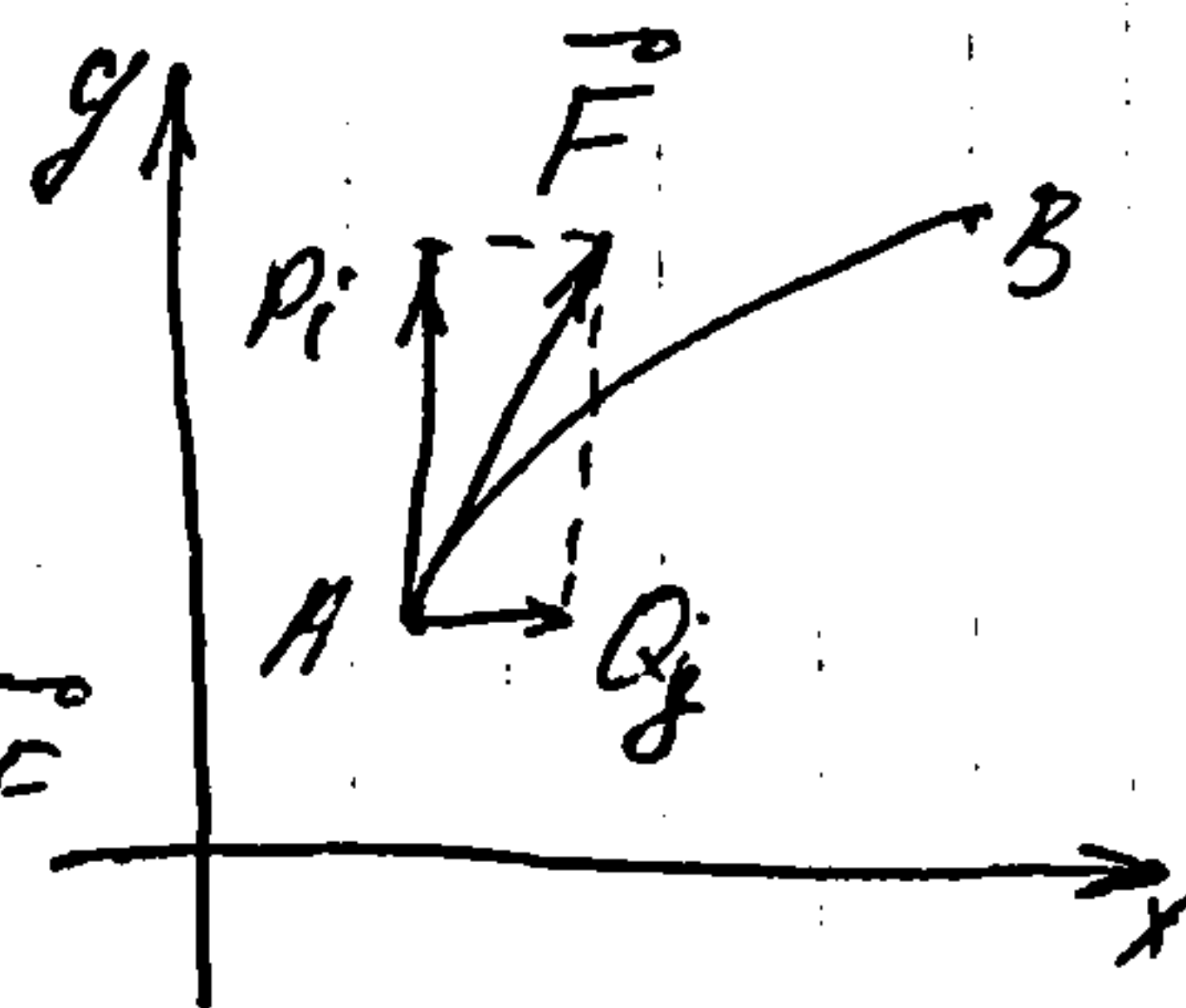
Вдоль L движется мат. точка под дей-ем силы $\vec{F}$

$P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k$ - работа, соверш. силой P по перем. точки из M_{k-1} в M_k

$Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k$ -

$P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k$ - работа $\vec{F}$ по перем. из M_{k-1} в $M_k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ интеграл I = работа по перем. м. т. из A в B под дей-ем силы $\vec{F}$



В E^3 аналогично

Лекция № 21

10.11.10

$$L = \sim AB$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$$\int_L f(x, y, z) d\ell = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_i$$

$$f, R, P, Q$$

$$\int_{\sim AB} P dx + Q dy + R dz$$

 E^n

$$L: \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \dots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$$

$$t, t_1, \dots, t_n$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_L f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\ell, \quad \int_{\sim AB} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

Опрез. Кривая $L = \sim AB$ называется ур-нием $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [a, b]$ (1)

мат. мажор, если найдётся такое параметризация, что функции φ, ψ в (1) имеют непрерыв. на $[a, b]$.

Опрез. Кривая L мат. кусочно мажор, если она непрерывна и состоит из конечного числа мажор кривых, не имеющих общих внутренних точек

Опрез. Точка M мажор кривой мат. обыкновенной, если $\exists$ параметризация (1) в которой $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$ в $t = M$.

Если $t = M$ не является обыкновенной, то она мат. особой точкой кривой L .

Необходимое ур. для особой точки: $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = 0$ для $\forall$ параметризаций (или S)

Пр. $y = x$ $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ мажор кривая без особых точек

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^3 \end{cases} \quad t = 0, x = y = 0 \quad \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = 0$$

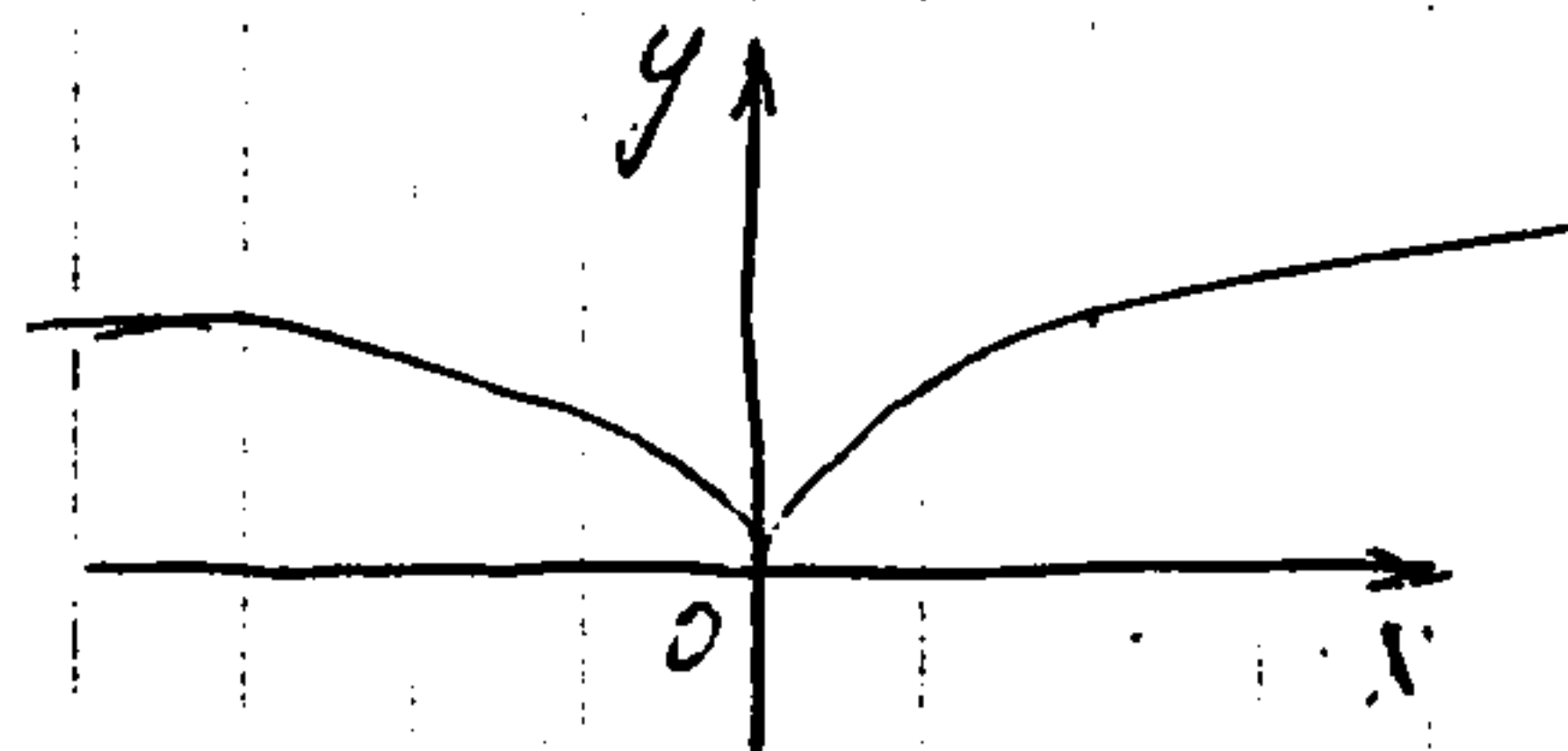
$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases} \quad \text{не мажор}$$

Пр. мажор кривой с особой точкой

$$L: y^3 - x^2 = 0, y = x^{\frac{2}{3}}$$

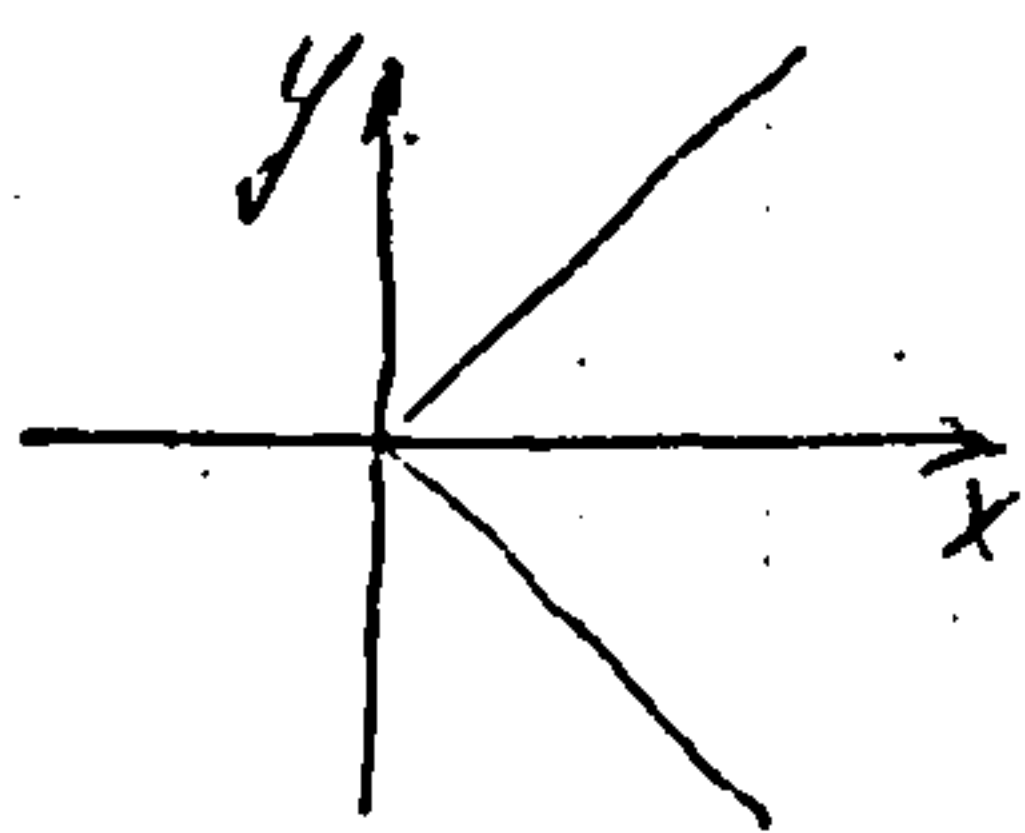
$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

$t = 0$ - особая точка
 $x = y = 0$ - точка возврата



кр. кусочно прямой кр.

$$\begin{cases} x=1/t \\ y=t \end{cases}$$



Теорема 1. Пусть кривая $L = \cup AB$ является прямой дугой осевых точек и описывается системой (1): $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$
 ф-ции $f(x, y), P(x, y), Q(x, y)$ непрер. на L .

Тогда $\exists$ все 3 криволинейных интеграла I_1, I_2, I_3 и справедливы:

$$I_1 = \int_L f(x, y) d\ell = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \equiv K_1$$

$$I_2 = \int_{\cup AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt \equiv K_2$$

$$I_3 = \int_{\cup AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt \equiv K_3$$

Док-во: инт. $K_1, K_2 - \exists$, т.к. подынтегр. выраж. непрер. на $[a, b]$

Разбиваем $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

$$\cup AB = \bigcup_{k=1}^n \cup M_{k-1} M_k, \quad \forall (\xi_k, \eta_k) \in \cup M_{k-1} M_k$$

Δ - диаметр разбиения

$$\tilde{b}_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \ell_k, \quad \tilde{b}_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k$$

Д-ть: при $\Delta \rightarrow 0$ $\tilde{b}_1 \rightarrow K_1, \tilde{b}_2 \rightarrow K_2$

Т.к. кривая L - прямая, то $\Delta \ell_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$

$$\tilde{b}_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\xi_k, \eta_k) \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} dt$$

$$K_1 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\xi_k, \eta_k) = \tilde{\xi}_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

$$\tilde{b}_1 - K_1 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(\varphi(\tilde{\xi}_k), \psi(\tilde{\xi}_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

$f(\varphi(t), \psi(t))$ - непрер. на $[a, b]$ по t как сложная

Д-ль, $\Delta \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta t = \max_{k=1, n} \Delta t_k \rightarrow 0$

$$\Delta \sim \Delta \ell_k \quad \Delta t \sim \Delta t_k$$

$$\Delta \ell_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

максимум на $[a, b]$

$$m = \min_{[a, b]} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} > 0, \text{ т.к. кривая } L \text{ ду осевых точек (в тангенту параллель.)} \Rightarrow$$

$$M = \max_{[a, b]} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

$$\Rightarrow \max_k \leq \Delta t_k \leq \max_k \quad \forall k$$

$$\Delta t_k \leq \frac{\Delta t_k}{m} \leq \frac{\Delta}{m} \quad \forall k \quad \Delta t \leq \frac{\Delta}{m} \Rightarrow \text{если } \Delta \rightarrow 0, \text{ то и } \Delta t \rightarrow 0.$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \Delta < \delta \quad |f(\varphi(\xi_k), \psi(\xi_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ где } L = |f_{AB}| - \text{значение } L.$$

$$\text{Тогда } |\tilde{\sigma}_1 - K_1| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{2} L = \varepsilon,$$

$$\text{т.е. } \exists \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{\sigma}_1 = K_1.$$

$$\tilde{\sigma}_2 : \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt$$

$$x_k = \varphi(t_k)$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\xi_k), \psi(\xi_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(\xi_k), \psi(\xi_k)) \varphi'(t) dt.$$

$$K_2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\tilde{\sigma}_2 - K_2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [P(\varphi(\xi_k), \psi(\xi_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))] \varphi'(t) dt$$

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \Delta < \delta \quad |[\dots]| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}, \quad M = \max_{[a,b]} |\varphi'(t)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{\Delta < \delta} |\tilde{\sigma}_2 - K_2| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot M \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \varepsilon.$$

$$\text{т.е. } \exists \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{\sigma}_2 = K_2$$

Замечание

1. Если L - кусочно-гладкая, то применим т.1 для каждого из гладких участков, суммируем и получаем аналог. ф-лу.

Если f, P, Q - кусочно-непрер., то применим т.1 на участках непрерыв. ф-ций, суммируем.

2. E^3 - аналогично

$$I_1 = \int_L f(x, y, z) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt$$

$$I_2 = \int_{AB} P(x, y, z) \varphi'(t) dt \quad f, P, Q, R.$$

E^n - аналогично.

3. $\tau.A = \tau.B$



Опред. Под положительным направлением обхода по замкнутой кривой L понимается то, при котором обходя, ориент. контуром остается слева по осм. и движ. по кривой тоже.

$$\oint_L f(x, y) d\ell$$

$$\oint_L P dx + Q dy \quad \text{в положит. напр.}$$

$$\text{Если в другом напр., то } \oint_{L^-} P dx + Q dy$$

Сл-ва те же, что и для опред. интеграла по дуге.

1° линейность $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g$ инт. на L

$$\int_L (\alpha f + \beta g) d\ell = \alpha \int_L f d\ell + \beta \int_L g d\ell$$

2° Аддитивность f -инт. на $\cup AB$

$$L = \cup AB = \cup AC \cup \cup CB, \quad \cup AC \cap \cup CB = \tau \cdot L$$

$$\int_{\cup AB} f d\ell = \int_{\cup AC} f d\ell + \int_{\cup CB} f d\ell$$

3° f -инт. $\Rightarrow |f|$ -инт. и $|\int_L f d\ell| \leq \int_L |f| d\ell$

4° $f \cdot g$ -инт.

5° $f \leq g \Rightarrow \int_L f d\ell \leq \int_L g d\ell$

6° Ф-ла среднего: f -инт. на $\cup AB$, непрерыв. ф-ция

$$\text{Тогда } \exists (\xi, \eta) \in \cup AB : \int_L f d\ell = f(\xi, \eta) \int_L 1 d\ell = f(\xi, \eta) \cdot \ell$$

$\ell = |L|$

$$\int_L f d\ell = \int_a^b f(\xi(t), \psi(t)) \sqrt{\psi'^2(t) + \psi''^2(t)} dt$$

$f \equiv 1$ на L

$$\int_L 1 d\ell = \int_a^b \sqrt{\psi'^2 + \psi''^2} dt = \ell = |L|$$

Другие формы задания кривой.

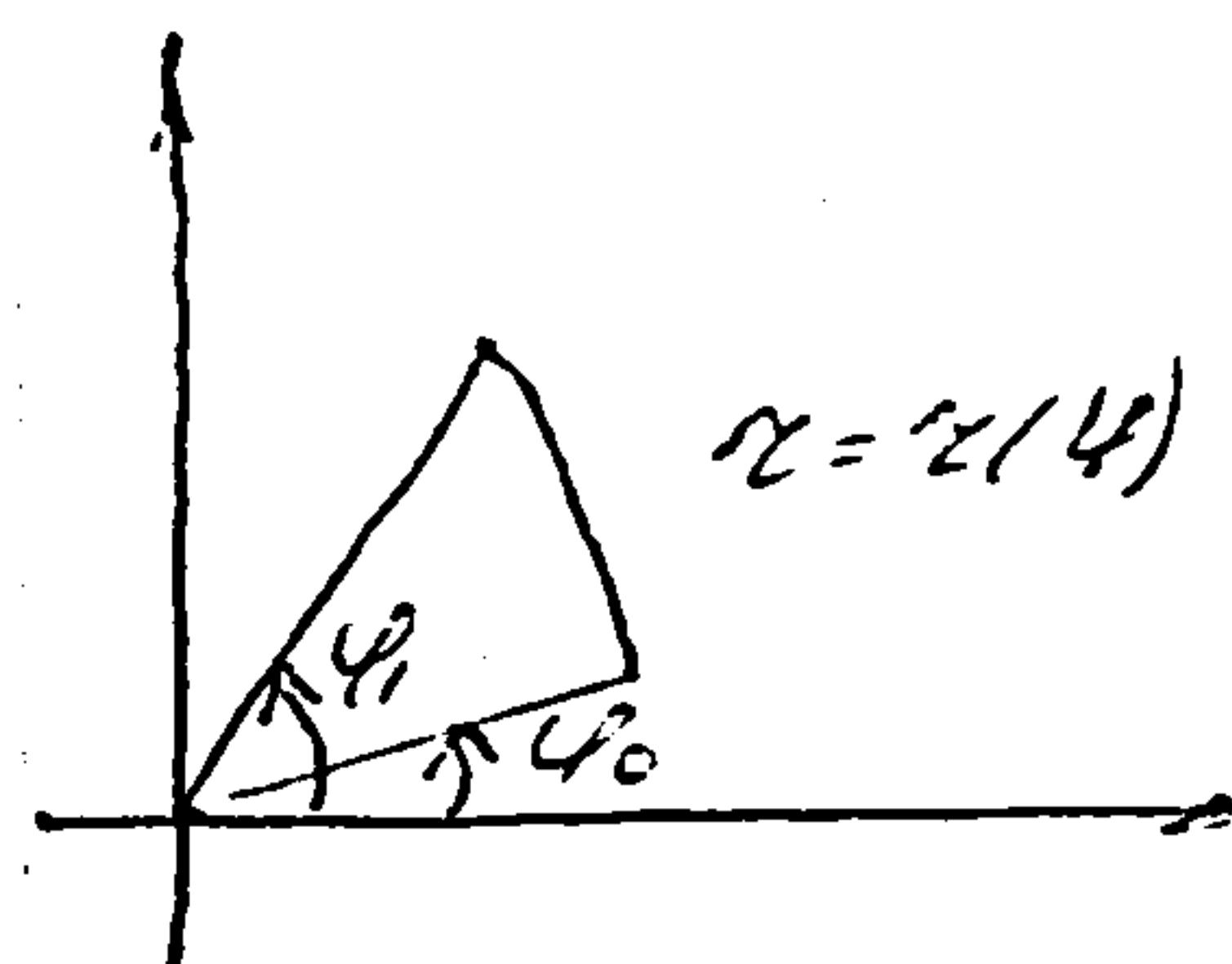
$$1) L: y = f(x) \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) = y(t) \end{cases}$$

$$\sqrt{\psi'^2 + \psi''^2} = \sqrt{1 + y'(t)^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

$$\int_L f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, y(t)) \sqrt{1 + y'_x} dx$$

$$\int_{AB} P(x,y) dx = \int_a^b P(x, y(x)) dx, \quad \int_{AB} Q(x,y) dy = \int_a^b Q(x, y(x)) y'(x) dx$$

$$2) \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$



$$a) \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1], \quad r = r(\varphi)$$

$$x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 = (r \cos \varphi)_\varphi'^2 + (r \sin \varphi)_\varphi'^2 =$$

$$= (r_\varphi' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r_\varphi' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2 = r_\varphi'^2 \cos^2 \varphi - 2 r_\varphi' r \cos \varphi \sin \varphi +$$

$$+ r^2 \sin^2 \varphi + r_\varphi'^2 \sin^2 \varphi + 2 r_\varphi' r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = r_\varphi'^2 + r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_L f(x,y) dl = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r_\varphi'^2 + r^2} d\varphi$$

$$\int_{AB} P(x,y) dx = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (r_\varphi' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi$$

$$\int_{AB} Q(x,y) dy = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Q(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (r_\varphi' \sin \varphi + r \cos \varphi) d\varphi$$

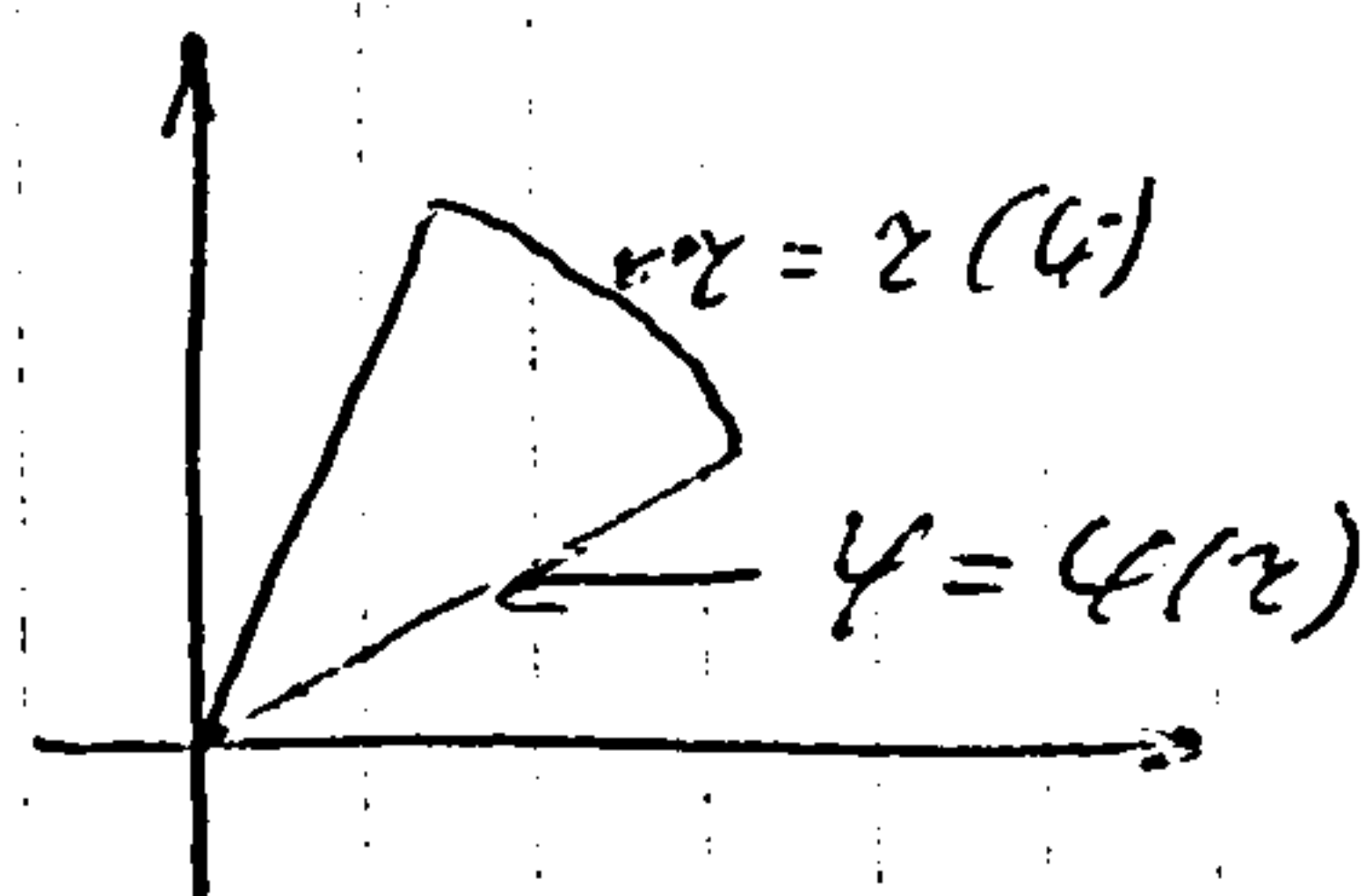
$$b) r \in [r_1, r_2], \quad \varphi = \varphi(r)$$

$$x_r'^2 + y_r'^2 = (\cos \varphi - r \varphi_r' \sin \varphi)^2 +$$

$$+ (\sin \varphi + r \varphi_r' \cos \varphi)^2 = 1 + r^2 \varphi_r'^2$$

$$\int_L f(x,y) dl = \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{1 + r^2 \varphi_r'^2} dr$$

$$\int_{AB} P(x,y) dx = \int_{r_1}^{r_2} P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (\cos \varphi - r \varphi_r' \sin \varphi) dr$$



§1. Поверхность и её основные св-ва.

Лекция № 22
15.11.10

1°. Введём понятие поверхности, касательной плоскости и нормали к поверхности.

$$G, G^* \subset E^3$$

Опр. 1 Преобразование $f: G \rightarrow G^*$ наз. гомеоморфизмом, если:

- 1) существует взаимно-однозначное отображение G на G^* ;
- 2) является взаимно непрерывным, т.е. $\forall$ ск-ей попл. точек $\{M_n\} \subset G$ отвечает сходящаяся попл. точек $\{M_n^*\} \subset G^*$, $M_n^* = f(M_n)$, обратно, $\forall$ ск-ей $\{M_n^*\} \subset G^*$ ответ ск-ей $\{M_n\} \subset G$: $M_n^* = f(M_n)$
кратко: f -гомеоморфно, $\Leftrightarrow, \exists f^{-1}$; f, f^{-1} -непрер.

Пример. $z = z(u) = z(x, y)$ - непрерывная ф-ция, $(x, y) \in G$

$$f: x=u, y=v, z=z(u, v)$$

$$f: G \rightarrow G^* \text{ гомеоморфно}$$

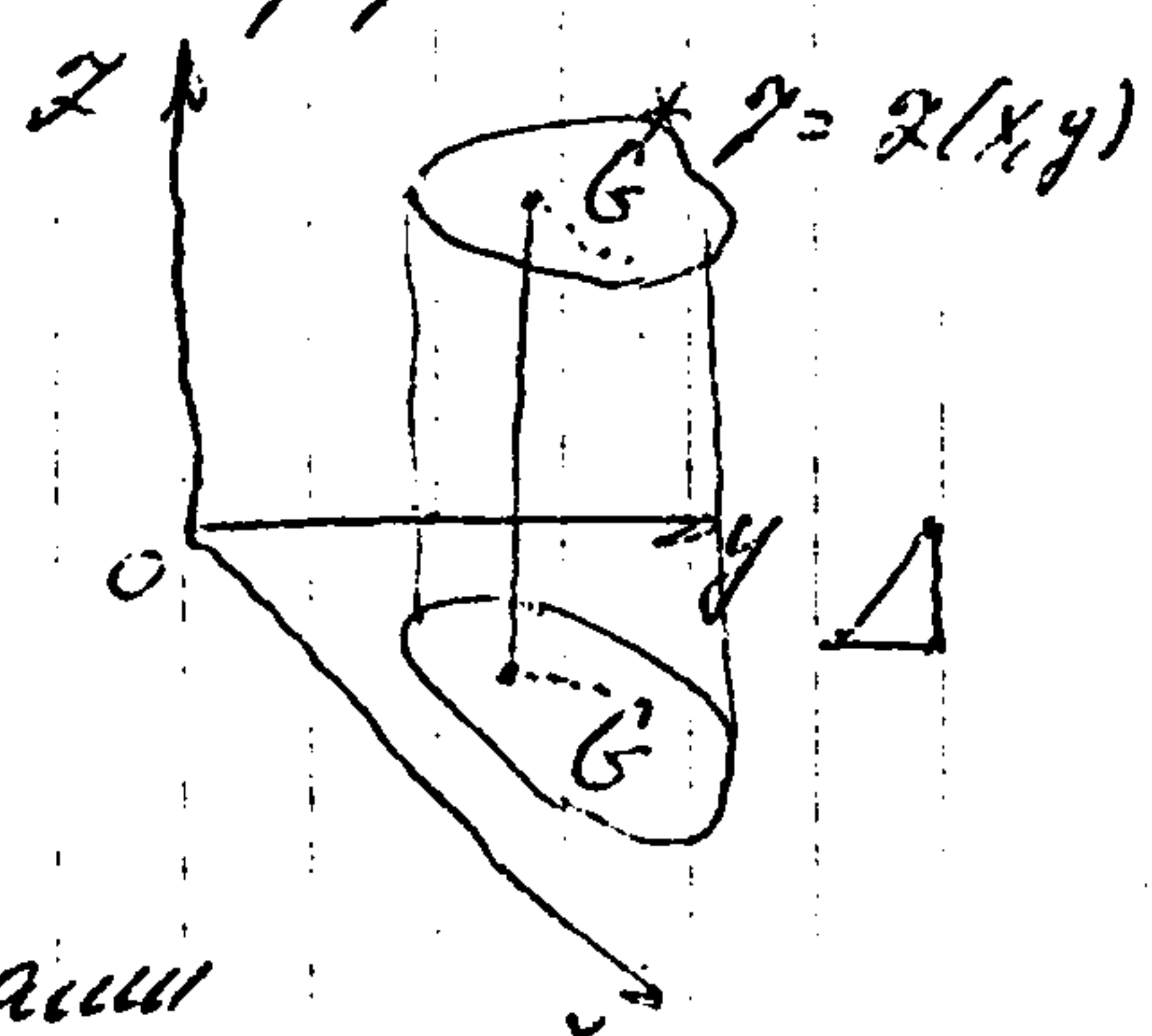
$$\{M_n^*\} \text{ ск-ей} \Rightarrow \{M_n\} \text{ ск., т.к. расст. между точками}$$

в пр-ве $\Rightarrow$ расст. между их проекц. на пл-ть.

$$\{M_n\} \text{ ск-ей} \Rightarrow \{M_n^*\} \text{ ск-ей, т.к. } z(x, y) \text{ непрер.}$$

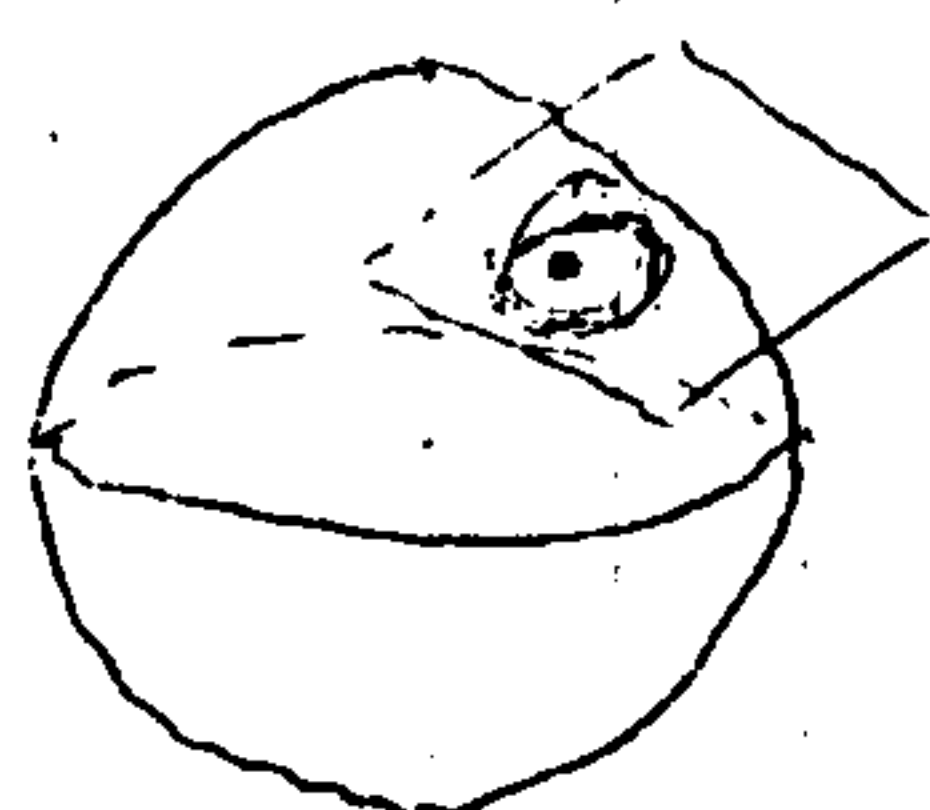
 G^* - образ мн-ва G G - прообраз мн-ва G^*

$$f(G) = G^*$$

Опр. 2 Под окрестностью точки M мн-ва Φ пр-ва E^3 наз. любая часть мн-ва Φ и какой-либо пространственной окр-ти ($\neq$ шару) точки M .Опр. 3 Множество Φ пр-ва E^3 наз. простой поверхностью, если оно связно и $\forall$ точка этого мн-ва имеет окрестность, которая явл. образом открытого круга при гомеоморфном отображении Φ на пр-во, т.е. $\forall$ т. мн-ва Φ имеет окр-ть, гомеом. некоторому открытому кругу.

Пример. Сфера - простой круг

пр.п. окр-ти

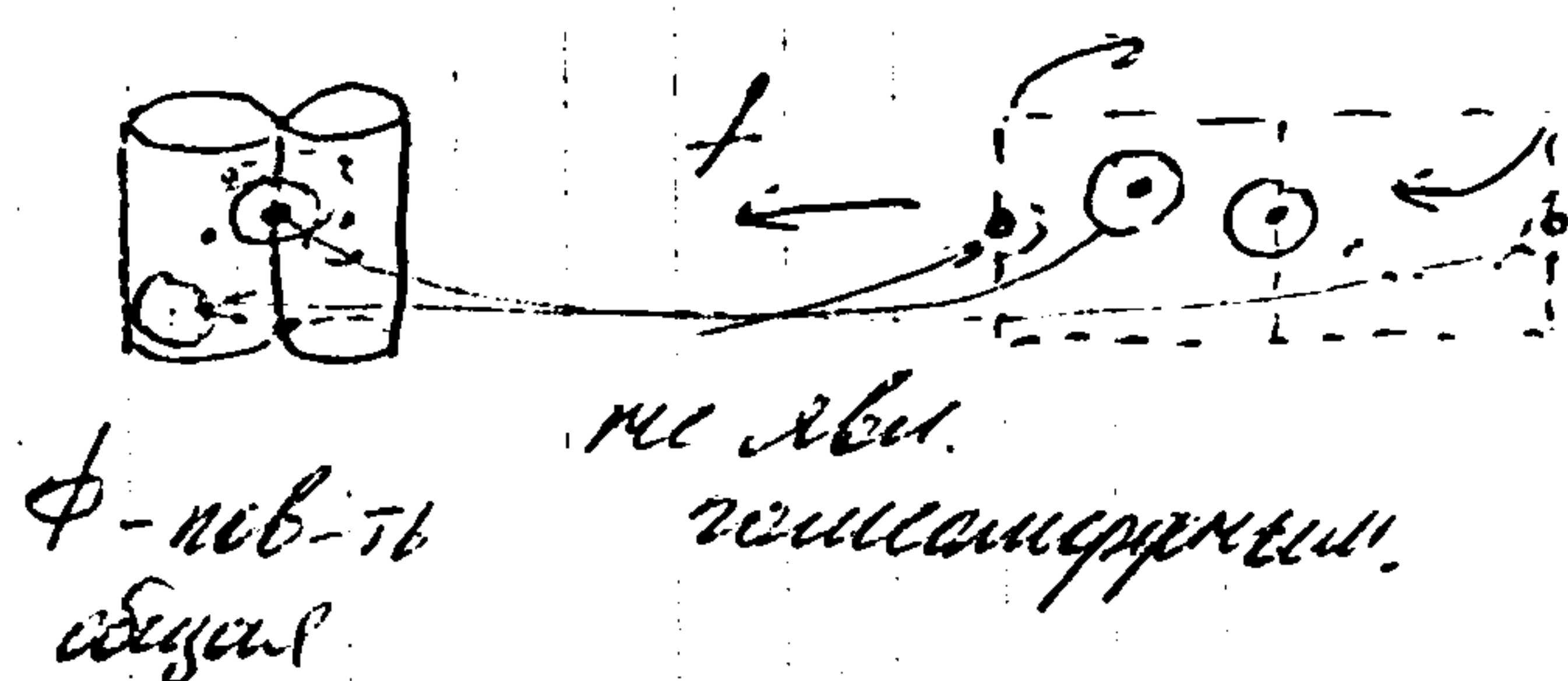
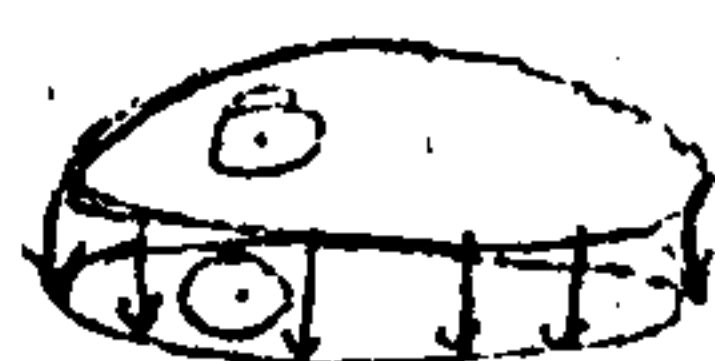
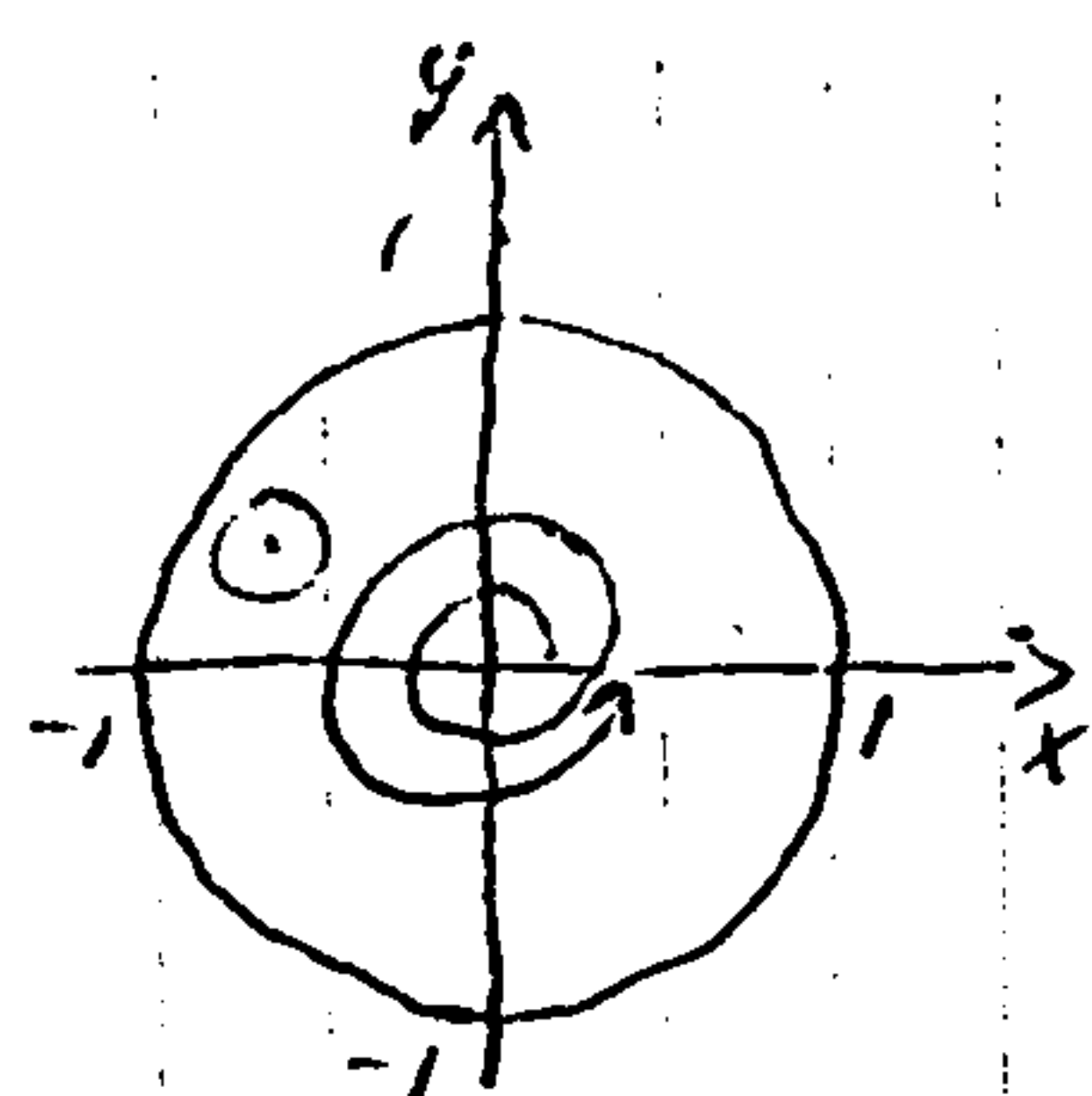
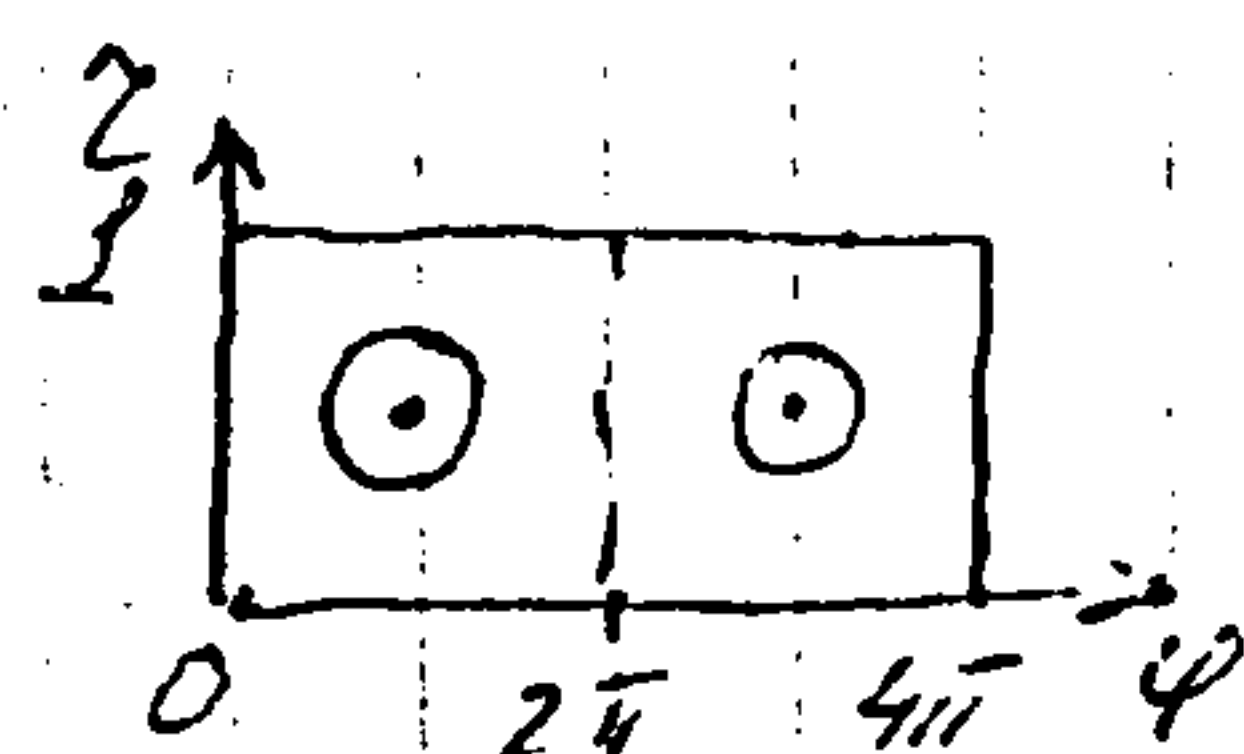
тип, типичность E^2 Мн-во предельных точек простой поверхности, ей не принадлежащее, наз. её границей или краем.Опр. 4 Отображение f мн-ва G на $G^* \subset E^3$ наз. локально-гомеоморфизмом, если $\forall$ точка мн-ва G имеет окр-ть, которая гомеоморфно отображается на свой образ.Мн-во Φ , являющееся локально-гомеоморфным отображением некоторой простой псв-ти, наз. общей поверхностью.Под окрестностью точки общей поверхности понимается образ некоторой окр-ти той же простой псв-ти, которая отображается на данную точку.

Замечание. Очевидно, что любая поверхность не имеет точек самораскрывания и самосамматывания, а любая поверхность может иметь такие точки.

Пример

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = 0 \end{cases}$$

$r \in (0, 1)$
 $\varphi \in (0, 4\pi)$



G - пр. пов.
пр-к без гранич.

Φ - пов-ть
объема

не явл.
гомеоморфизм.

Спр. 5 Область G в n -ти T наз. эллипсоидом, если она явл. образом некоторого единичного круга при гомеоморфизме Φ его на n -ти T .

Спр. 6 Поверхность Φ в n -ти T наз. гладкой, если каждая точка M в Φ имеет окрестность, гомеоморфную малому параметризационному, т.е. указавши окр-ть являющуюся образом некоторой n -ти области G в n -ти T при Φ , при отображении задаваемом Φ с M в T .

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in G \quad (1)$$

где Φ -ции $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ явл. гладкими, т.е. непрер. диф-иальны и непрер. част. производ.

причем $\vec{r} = \vec{r}(u, v), \vec{r} = \{x, y, z\}$

Спр. 7 Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ гладкой поверхности наз. базисной, если

ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ в M_0 равен 2.

$M_0(u_0, v_0)$ - прообраз M_0 , т.е. $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0), z_0 = z(u_0, v_0)$

$\text{rang } A|_{M_0} = 2$

В противном случае точка называется особой.

Пример.

$z = z(u, v) = z(x, y)$ - непрер. диф. Φ -ция

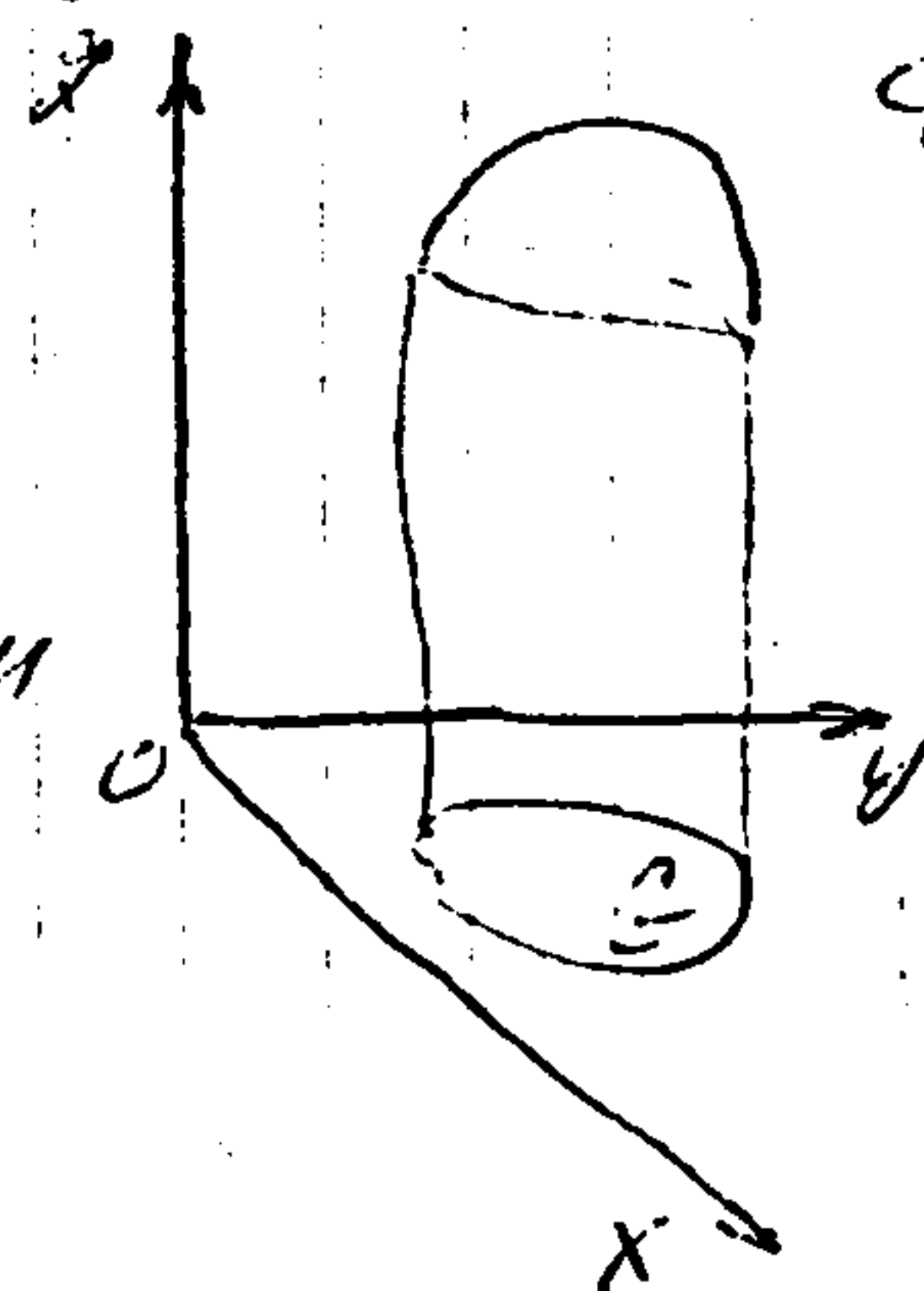
$M \in G : x^2 + y^2 < 1$

на Φ единичная параметризация:

$x = u, y = v, z = z(u, v)$ - гладкие Φ -ции
 $(u, v) \in G$

Гладкая поверхность без особых точек

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x, y \quad \text{rang } A|_G = 2$



Φ - гладкая Φ -ция

Опр. 3 Область G на плоскости наз. проект., если она явл. проект., если она явл. проект. поверхностью

Теорема 1. Пусть обл. G явл. проект. плоской областью в m -гу ($m \geq 2$) такое отображение (1) переводит G в некоторую мн-во $\Phi \subset E^3$, $\dim A = 1$ во всех точках G .

Тогда мн-во Φ явл. общей поверхностью.

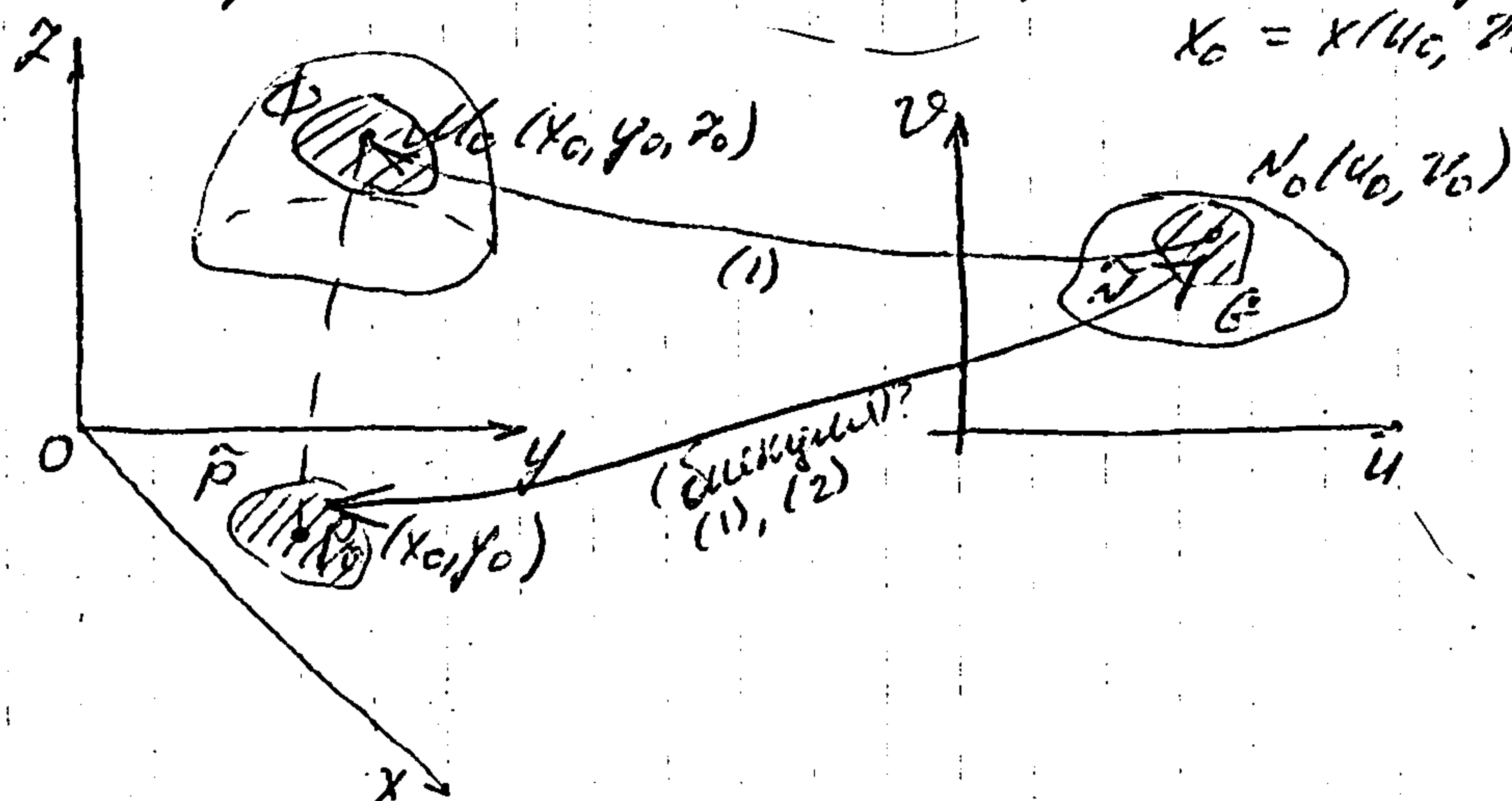
Док-во: Д-ть, что сист. (1) осуществляет локал. гомеом. отображ. G на Φ , т.е.

$\forall \tau. N_0(u_0, v_0)$ имеет некое окр-ть, которая соотносительн (1) гомеоморфно отображается на некое окр-ть $\tau. M_0(x_0, y_0, z_0)$ на Φ
 $x_0 = x(u_0, v_0), \dots$

Ф-ция $\forall \tau. N_0 \in G$,
 ей отв. $\tau. M_0 \in \Phi$

$$\dim A|_{N_0} = 2$$

$$\text{Пусть } \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \Big|_{N_0} \neq 0$$



Этот определитель есть якобиан пр. (1) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{N_0} \neq 0 \Rightarrow$

Φ -ции $x(u, v), y(u, v)$ - непрер. дифр. G

$\Rightarrow$ выполняется все усл. теоремы о разрешимости сист. ур-ий неявно заданных ф-ций

$$\begin{cases} x(u, v) - x = 0 \\ y(u, v) - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в некоторой окрестности $\tilde{P}$ точки $P_0(x_0, y_0)$ $\exists!$ непрер. дифр. решение этой сист.:

$$u = u(x, y), v = v(x, y), (x, y) \in \tilde{P} \quad (2)$$

Эти соотношения (2) определяют некое окр. $\tilde{N}$ точки N_0 на G .

Очевидно, 1^{ое} для сист. (1) осуществляемое гомеоморф. отображ. $\tilde{N}$ на $\tilde{P}$

Подставим сист. (2) в оставшуюся сист. (1) $z = z(u, v)$:

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) = \varphi(x, y), (x, y) \in \tilde{P}$$

$$z = \varphi(x, y): \tilde{P} \rightarrow \tilde{M} - \text{окр-ть } \tau. M_0 \text{ на } \Phi.$$

Очевидно, это отображ. гомеоморфно

А т.к. соответствующая $1^{\text{ая}}$ гомеом. отображ. явл. гомеом. отображ., то сист. (1) осуществляемое гомеом. отображ. окр-ти $\tilde{N}$ на $\tilde{M}$

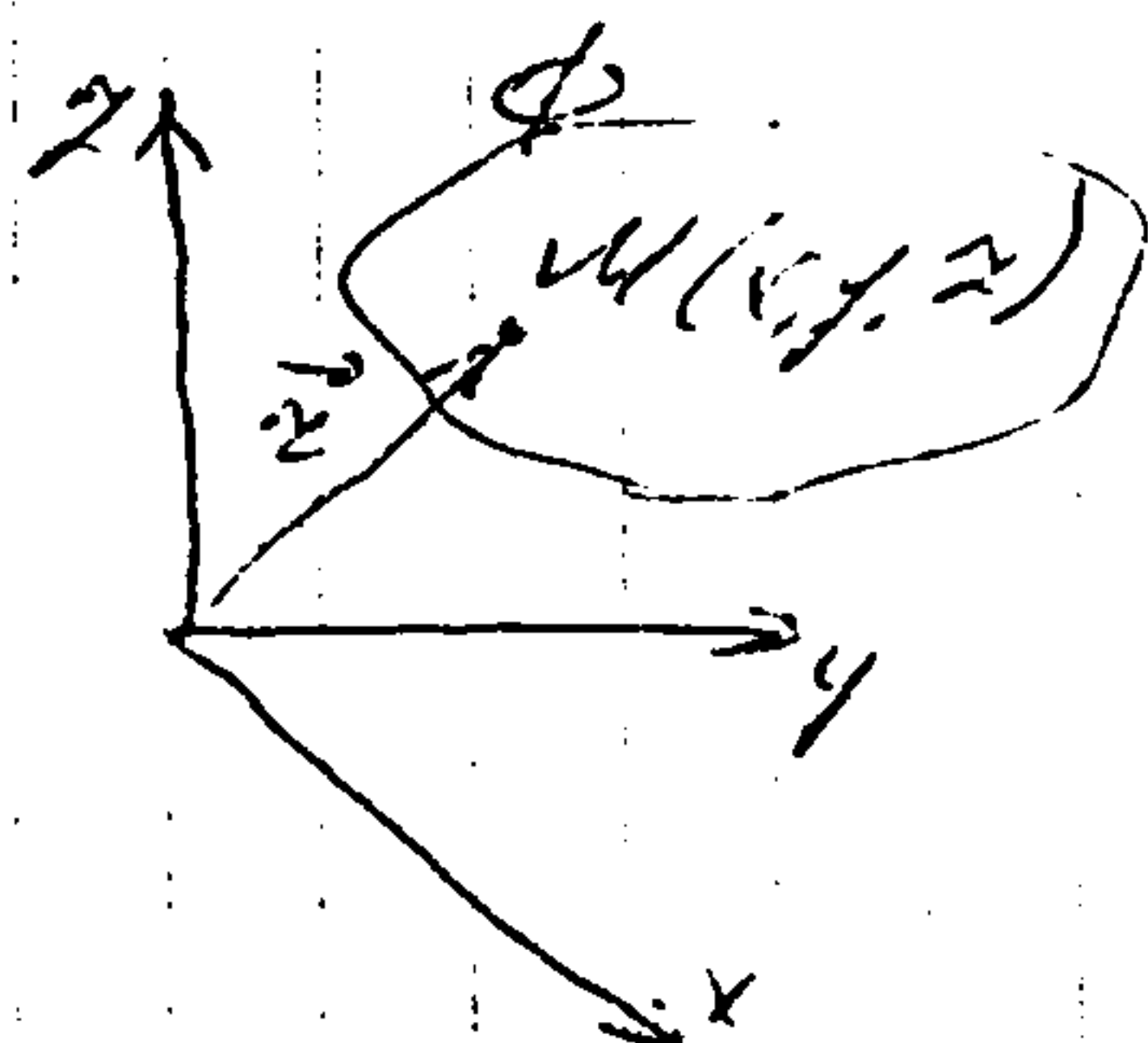
Следствие 1. Каждая ^{обычн.} точка гладкой пов-ти имеет окр-ть, которая однозначно проектируется на одну из осей координат в выбранной ОНУ Σ (в соотв. т.1 - ОНУ) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ эта окр-ть лев. графиком функ. $z = z(x, y)$ $\Rightarrow$ в этой точке можно провести касат. пл-ть и пов-ть Φ .

Параметрич.

$$\vec{r}(M) = \vec{r} = \{x, y, z\}$$

как радиус-вектор от пов-ти Φ .



Φ - гладк. пов. без особых точек.

$\tilde{M}$ - окр-ть т. M_0 , описываемая соотн. (1)

$$M \in \tilde{M} : M(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(u, v) - \text{радиус-в-р пов-ти}$$

Фикс. $v = v_0$, $\vec{r}(u, v_0)$ - описав "линию (u) "

Фикс. $u = u_0$, $\vec{r}(u_0, v)$ - описав "линию (v) "

Фикс. $u = u_0, v = v_0$ $\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)$ их касат. совпадают со сторонами u -угла (2) в т. (u_0, v_0)

$$M_0 - \text{обычн. точка} \Rightarrow \text{rang } A|_{(u_0, v_0)} = 2 \Rightarrow \vec{r}_u, \vec{r}_v(u_0, v_0) \text{ линейно независимы}$$

$\Rightarrow$ порождают касат. пл-ть.

Эту плоскость наз. касательной пл-тью к пов. Φ в т. M_0 .

Нормалью к поверхности Φ в т. M_0 наз. прямая $\perp$ кас. пл-ти, проходящая чрез т. M_0 .

Векторн. нормаль к пов. Φ в т. M_0 наз. $\vec{N}$ вектор $\parallel$ нормали к Φ в т. M_0

$$\vec{N}_{M_0} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_{M_0} - \text{вектор нормали к } \Phi \text{ в т. } M_0$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \rightarrow N_0(u_0, v_0)$$

$$\vec{n}_M = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} - \text{единичный в-р нормали к } \Phi \text{ в т. } M \in \tilde{M}$$

Φ - гладкая, соотн. (1) - непрер. функ. $z = z(x, y)$

$\vec{r}_u, \vec{r}_v$ - непрер. ф-ции

$\vec{N}_M, \vec{n}_M$ - непрер. векторн. ф-ции в $\tilde{M}$

Следствие 2 из т.1

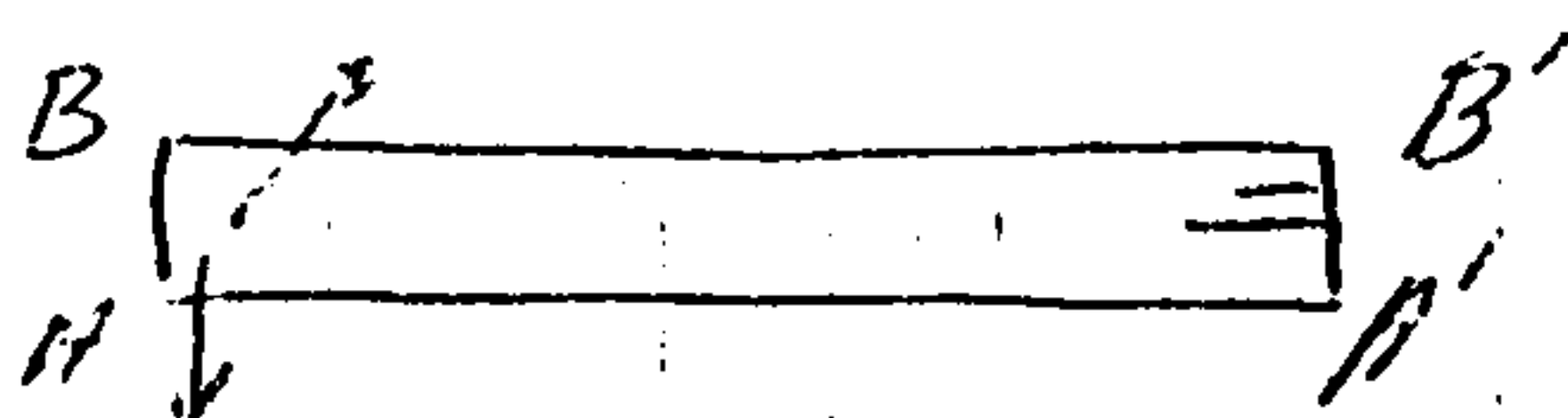
Каждая обычн. точка гладкой пов-ти имеет окр-ть, в которой $\exists$ непрер. функ. поле нормалей



Если Φ - гладкая, Γ и на ней непрерыв. в целом вект. поле нормалей?
 $\vec{n}_0$ - непрерыв. на Φ ?

Спр 9 Поверхность Φ , на которой Γ непрерывное в целом вект. поле нормалей наз. двусторонней.
 Много - мн. сторонней.

Пример. лист Мёбиуса
 одностор. пов.



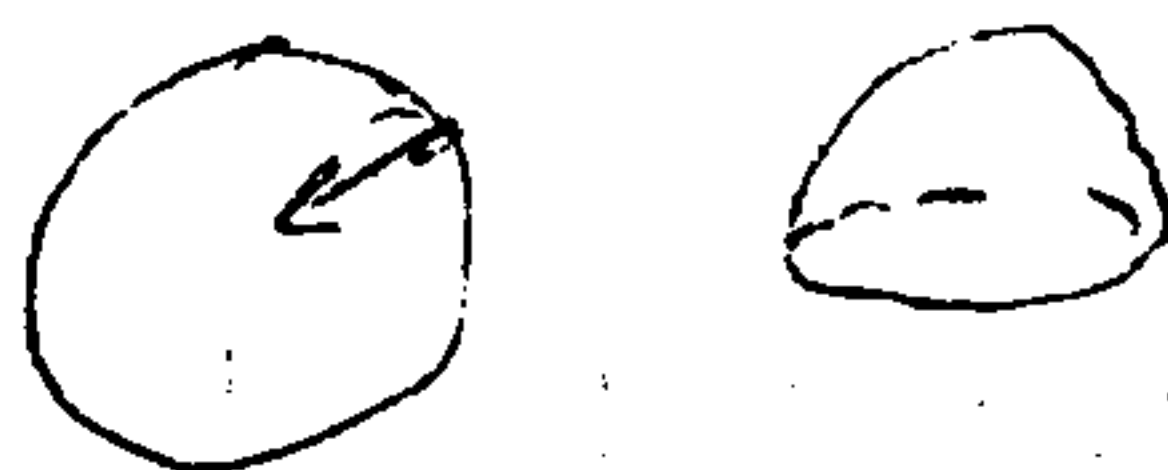
$$\begin{matrix} A+B' \\ B+A' \end{matrix}$$



Спр 10 Поверхность Φ наз. полной если $\forall$ функциональный набор точек этой пов-ти существует к точке этой пов-ти, т.е. им-во точек, составляющих Φ явл. замкнутым.



металл. пов-ть.



полные



Поверхность Φ наз. ограниченной если её можно поместить в нек-б. шар конечного радиуса.

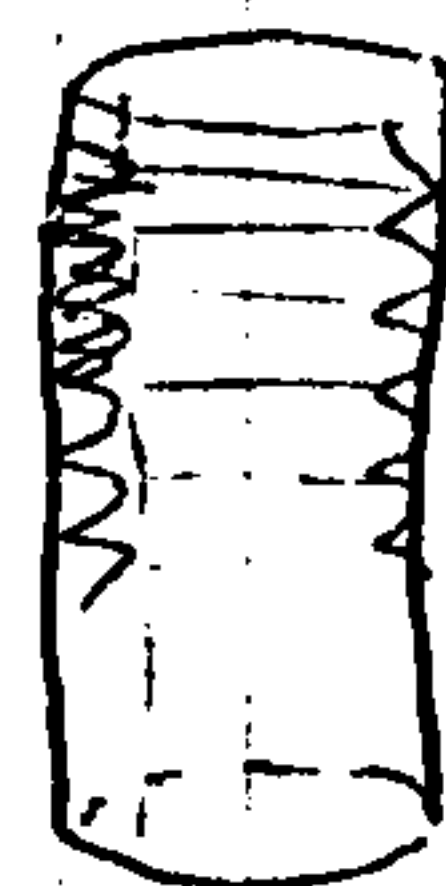
Далее в пов-ти, удовлетв. еще 5 усл. (*):

- 1) гладкие
 - 2) без особых точек
 - 3) двусторонние
 - 4) ограниченные
 - 5) полные, либо замкнутые части полных пов-тей.
- (*)

2° Леммы о проекции.

Лемма 1. $\forall$ абсч. точки M_0 гладкой пов. Φ имеет окр., которая однозначно проектируется на касательную пл-ть к Φ , проведенную через $\forall$ фиксир. точку этой пов-ти.

"Салом Шварца" 1890г.



и.т.

2-во: Док, что указанные св-ия обладают абсч. окр-ть $\tilde{M}_0$ точки M_0 :

- 1) векторы нормали в точках M этой окр-ти образуют с $\vec{n}_{M_0}$ угол $\leq \pi/4$ (сл. 2. из 1.1 параллельно Γ точкой окр-ти)
- 2) эта окр-ть $\tilde{M}_0$ однозначно проектируется на касательную пл-ть в окр-ти координат (сл. 1 из 1.1 параллельно Γ точкой окр-ти)

$$\angle \tilde{M}_0: 1) \forall M \in \tilde{M}_0 \quad (\vec{n}_M, \vec{n}_{M_0}) \leq \frac{\pi}{4}$$

$$2) \text{пр}_{\text{пл}} \tilde{M}_0 = \{\text{круг}\}$$

□

$\tilde{M}$ не обладает указанными в утв. св-вами:

$\Rightarrow \exists \gamma, M \in \tilde{M}$: $\tilde{M}$ не пересекается существенно на касат. м-те к Φ в т. $M \Rightarrow \exists \gamma, P, Q \in \tilde{M}$, которые проектируются в одну точку на эту кас. м.

$\Rightarrow$ хорда $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{n}_M$

Проведем м-ть $\overrightarrow{PQ} \parallel OX$ она пересекет $\tilde{\Phi}$

по некоторой кривой PNQ

прямиз. этой кривой на OY - $P'Q'$ uniquely определен

прямиз. $\tilde{M}$ на $OY \Rightarrow \cup PNQ \subset \tilde{M}$, $\cup P'Q'$ явл. графиком функ. φ -ции, опред. на $\overrightarrow{P'Q'}$.

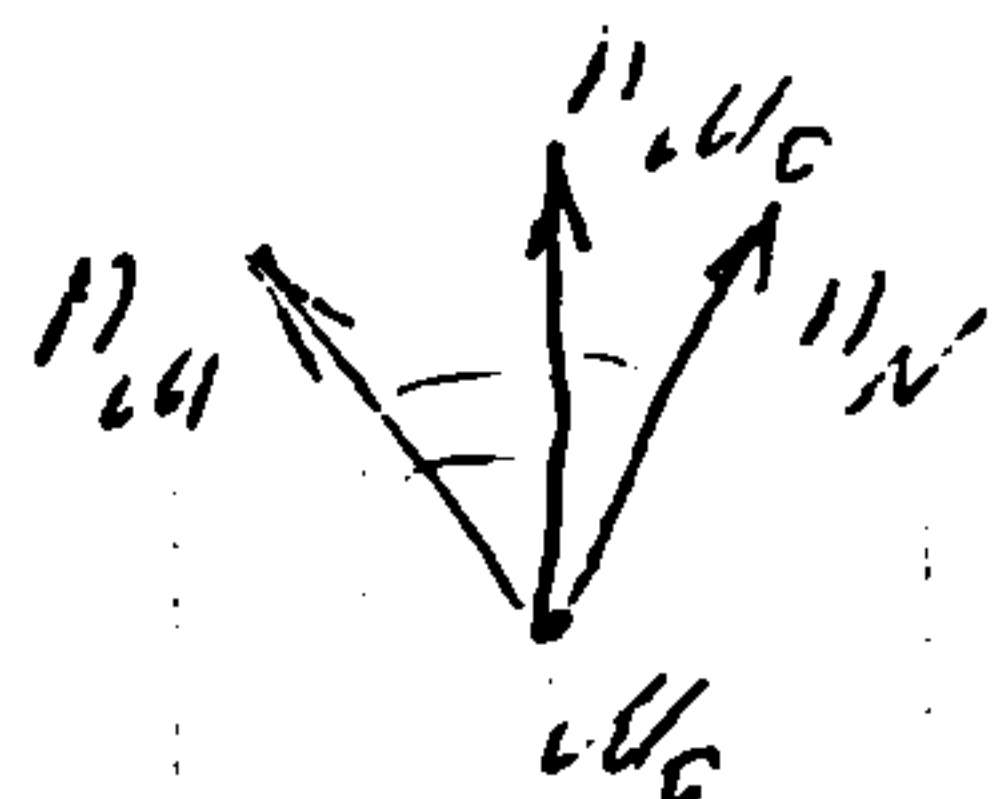
$\Rightarrow$ по т. Вейерштрасса $\exists \gamma, N \in \cup P'Q'$ касат. в которой $\parallel$ хорде $\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{n}_N \perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \vec{n}_N \perp \vec{n}_M$$

По утв. $\forall \gamma, M \in \tilde{M}, (\vec{n}_M, \vec{n}_{M_0}) < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \forall \gamma, M, N \in \tilde{M}$

$$(\vec{n}_M, \vec{n}_N) < \frac{\pi}{2}$$

у нас $(,) = \frac{\pi}{2}$ - не может быть?!



Опр

Часть $\tilde{\Phi}$ пов-ти Φ имеет диаметр (размер) меньший чем δ ($\delta > 0$) если $\tilde{\Phi}$ можно поместить в некое шар диаметра $\leq \delta$.

$$d(\tilde{\Phi}) = \sup_{M, N \in \tilde{\Phi}} \rho(M, N) < \delta.$$

Лемма 2. Пусть пов-ть Φ удовл. 5 утв. (1-4), иначе быть может утв. 3) неверно

Тогда $\exists \delta > 0$: $\forall$ часть $\tilde{\Phi} \subset \Phi$, $d(\tilde{\Phi}) < \delta$, существенно пересекается на касат. м-те к Φ , прямиз. хорд. произв. диаметр точки этой части и хорд. бы на одну из касат. м-тей в произвольно выбранной с.н. Ox_1x_2 .

Далее: □ $\exists \delta > 0$

Тогда $\forall \delta_n = \frac{1}{n} > 0 \exists \Phi_n \subset \Phi$, $d(\Phi_n) < \delta_n$, которая существенно

не пересекается, либо хорд. бы на одну из касат. м-тей, прямиз. хорд. точки этой части, либо на на одну из касат. м-тей в некоторой с.н. Ox_1x_2 .

Выбираем $\forall \gamma, M_n \in \Phi_n$, $\{M_n\}$

Φ - компактное мн-во

$\{M_n\}$ - сгр. $\Rightarrow$ у нас можно выделить сходящ. подпослед.

$$M_{n_k} \rightarrow M_0$$

$M_0 \in \Phi$, т.к. Φ - замкнутое мн-во

т. M_0 - обобщенная точка $\Rightarrow \exists$ окр $\tilde{M}$ т. M_0 , сносим. проецир. на V кас. мн-во в точках $\tilde{M}$ и хотя бы на одну из касат. мн-во. в окр с.к.

$d(\Phi_k) \rightarrow 0 \Rightarrow \exists N \forall n > N \quad \Phi_k \subset \tilde{M} \Rightarrow$ все эти Φ_k проецир. на V кас. мн-во хотя бы на одну из касат. мн-во.

Противоречие с выбором Φ_k ?!

Лемма 3.] кр-во Φ упр-л. бул. (*)

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{\Phi} \subset \Phi, d(\tilde{\Phi}) < \delta$ справедливы след. утвержд.:

$$\cos \gamma = 1 - \alpha_\Phi, \quad 0 \leq \alpha_\Phi < \varepsilon, \quad \text{где } \gamma = (\vec{n}_M, \vec{n}_N) \quad \forall M, N \in \tilde{\Phi}$$

Д-во: Φ - двучлор. $\Rightarrow \vec{n}_M$ - касат. ф-ция на Φ ,

Лемма N 24
22.11.10

Φ - компактно $\Rightarrow \vec{n}_M$ - равн. касат. ф-ция на Φ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall M, N \in \Phi : \rho(M, N) < \delta \quad |\vec{n}_M - \vec{n}_N| < \sqrt{2\varepsilon}$$

$$\cos \gamma = (\vec{n}_M, \vec{n}_N) = 1 - \frac{1}{2} (\vec{n}_M - \vec{n}_N)^2$$

$$\gamma = (\vec{n}_M, \vec{n}_N) \quad \left(1 - \frac{1}{2} (\vec{n}_M^2 - 2(\vec{n}_M, \vec{n}_N) + \vec{n}_N^2) \right)$$

$\rho(M, N) < \delta$
 $M, N \in \Phi$

$$\frac{1}{2} (\vec{n}_M - \vec{n}_N)^2 \equiv \alpha_\Phi$$

$$\cos \gamma = 1 - \alpha_\Phi \quad 0 \leq \alpha_\Phi < \frac{1}{2} (\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

§2. Площадь поверхности.

Пусть поверхность Φ упр-л. бул. (4), в усл. 5) предположим, чтобы $\partial\Phi$ были одна или несколько кусочно гладких кривых.

Разбиваем Φ на конечное число частей Φ_i , не имеющих общих внутр. точек, ортогонально проецир. на V касательную мн-во в точках этих частей.

$$\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$$

Выбираем $\forall i$ т. $M_i \in \Phi_i$, проводим касат. мн-во к Φ в т. M_i ,

Ω_i - проекция Φ_i на эту кас. мн-во.

$\sigma_i = |\Omega_i|$ - площадь проекции

$d_i = d(\Phi_i)$ - диаметр Φ_i , $\Delta = \max_{i=1, \dots, n} d_i$ - диаметр разбиения Φ .

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i$$

$$[\vec{z}_u, \vec{z}_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \{A, B, C\}$$

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

гип. $C > 0$ $\vec{n}_u = \frac{[\vec{z}_u, \vec{z}_v]}{|[\vec{z}_u, \vec{z}_v]|} = \left\{ \frac{A}{|[\vec{z}_u, \vec{z}_v]|}, \frac{B}{|[\vec{z}_u, \vec{z}_v]|}, \frac{C}{|[\vec{z}_u, \vec{z}_v]|} \right\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$
направляющие косинусы.

$$\cos \gamma = \frac{C}{|[\vec{z}_u, \vec{z}_v]|} \quad \gamma = (\vec{n}_u, \vec{0}_i x) = (\vec{n}_u, \vec{n}_{u_i}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = 1 - d_i, \quad d_i < 1 \Rightarrow \cos \gamma > 0 \Rightarrow C > 0.$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} > 0 \quad \forall (u, v) \in G_i$$

$$K = \sum_{i=1}^n A_i, \quad A_i = \iint_{G_i} \left| \left[\frac{\partial \vec{z}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{z}}{\partial v} \right] \right| du dv = \iint_{G_i} C \cdot \frac{|[\vec{z}_u, \vec{z}_v]|}{C} du dv = \iint_{G_i} 1 du dv = \iint_{G_i} 1 dv dy =$$

формула среднего $\frac{1}{\cos \gamma} \Big|_{\vec{n}_i} \iint_{G_i} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv = \frac{1}{\cos \gamma} \Big|_{\vec{n}_i} \iint_{G_i} 1 dv dy =$

$$= \frac{1}{\cos \gamma} \Big|_{\vec{n}_i} \cdot |G_i| \Rightarrow G_i = A_i \cos \gamma \Big|_{\vec{n}_i} = A_i (1 - d_i) = 0 \leq d_i < \frac{\varepsilon}{K}$$

$$= A_i - d_i A_i \quad \Big| \sum_{i=1}^n$$

$$\left| \sum_{i=1}^n G_i - K \right| = \sum_{i=1}^n d_i A_i < \frac{\varepsilon}{K} \sum_{i=1}^n A_i = \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \sum_{i=1}^n G_i = K$$

формула (1) верна в точках I функции.

II Если на Φ нет единичной параметризации, то её можно разбить на конечн. число частей (кр.-изогнутыми кривыми), каждая из которых имеет параметриз. на одну из осей коор. системы $\Rightarrow$ каждая часть графика функ. Φ -ции $\Rightarrow$ на каждой части верна единичная параметр.

по I. каждая часть квадр. Φ -квадр. $|\Phi| =$ сумма площадей этих частей

Φ -на (1) верна в каждой части своей суммы ит-ов по каждой из частей разбиения

$$G = |\Phi| = \iint_G |[\vec{z}_u, \vec{z}_v]| du dv = \iint_G \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

$$[\vec{z}_u, \vec{z}_v] = \{A, B, C\}$$

Φ - график функ. $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = [\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = \{-z'_x, -z'_y, 1\}$$

$$\vec{r} = \{x, y, z(x, y)\}$$

$$\sigma = \iint_G \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad |\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \left(\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2} \geq 0$$

$$\vec{a} = \vec{r}_u, \quad \vec{b} = \vec{r}_v$$

$$|\vec{r}_u, \vec{r}_v| = \sqrt{\vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2} = \sqrt{E\mathcal{D} - F^2}$$

$$\text{Соглн.} \quad \vec{r}_u^2 = E, \quad \vec{r}_v^2 = \mathcal{D}, \quad (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2 = F$$

$$\sigma = \iint_G \sqrt{E\mathcal{D} - F^2} du dv$$

$$\Phi: \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = 0 \\ r \in [0, 1] \\ \varphi \in [0, 4\pi] \end{cases}$$



$$\sigma = \iint_G |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv = \int_0^{4\pi} d\varphi \int_0^1 r dr = 4\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 = 2\pi = \pi + \pi = S \text{ 2х кругов}$$

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r$$

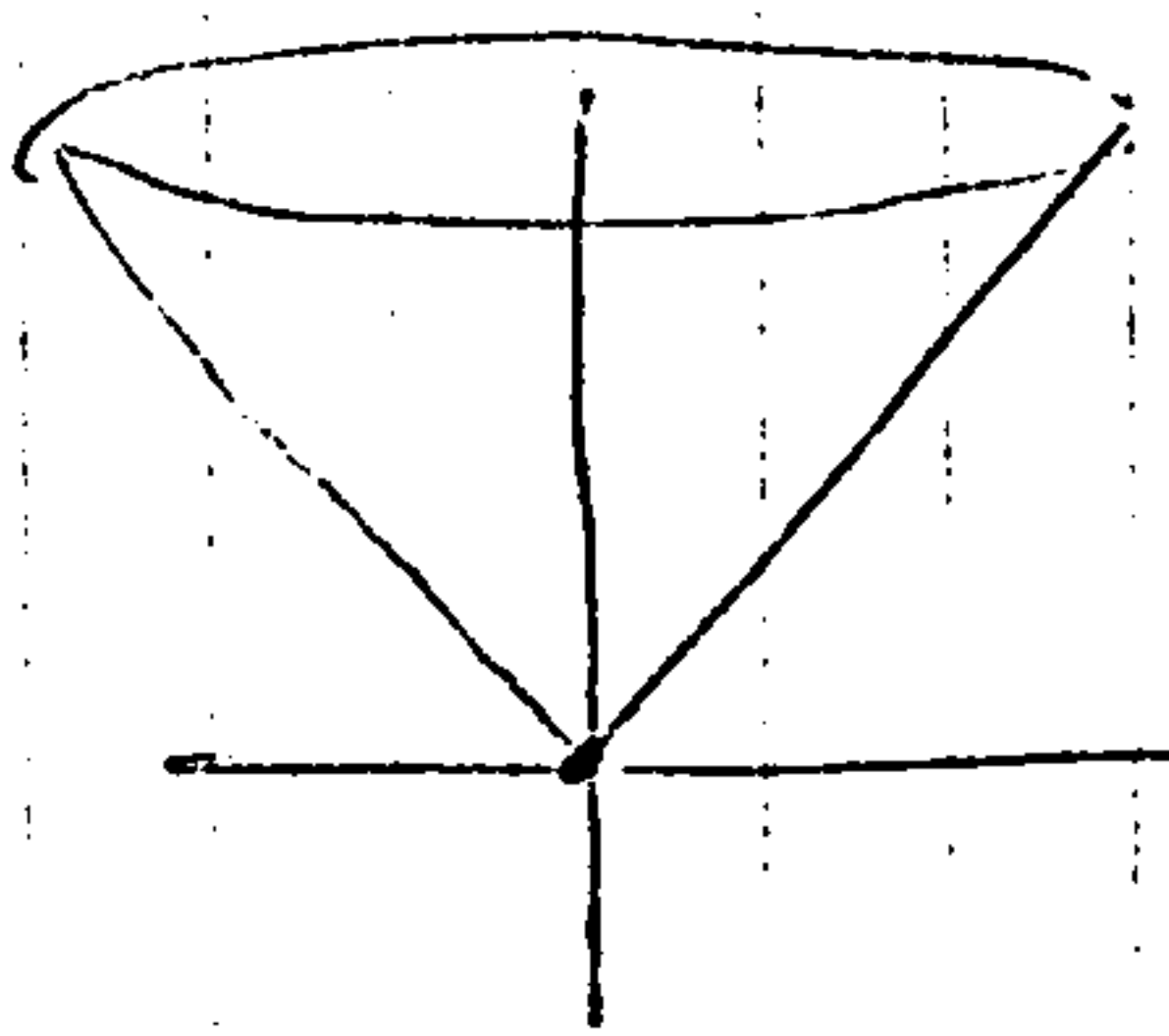
$$z^2 = x^2 + y^2 \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} = r \end{cases}$$

матрица Jacoby

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 1 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$x=y=z=0$ — особая т.



§3 Интегралы по поверхностям

Φ — поверхность, уровн. 5-го кл. (*) $Oxyz$ в E^3

$\vec{n}_M \perp \Phi$, $\vec{n}_M = \{\cos \chi, \cos \psi, \cos \gamma\}$ ориентирует пов-ть.

Разбиваем Φ кр.-изогр. кривыми на элементы типа Φ_i , $i = \overline{1, n}$
 из соседних выпукл. точек. $\Phi_i = \Phi_i$

$\delta_i = |\Phi_i|$ — диаметр разб.

На Φ Δ 4 непрер. ф-ции:

$f(x, y, z) = f(M)$, $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ (прив. непрер. ф-ции)

$\forall M_i \in \Phi_i$ $\vec{n}_{M_i} = \{\cos \chi_i, \cos \psi_i, \cos \gamma_i\}$

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^n f(M_i) \delta_i$$

$$\Sigma_2 = \sum_{i=1}^n P(M_i) \cos \chi_i \delta_i$$

$$\Sigma_3 = \sum_{i=1}^n Q(M_i) \cos \psi_i \delta_i$$

$$\Sigma_4 = \sum_{i=1}^n R(M_i) \cos \gamma_i \delta_i$$

Всп. Если I_s , $s=1,2,3,4$ кр. пределы инт. сумм Σ_s при $\Delta \rightarrow 0$,
 если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \Delta < \delta \Rightarrow |I_s - \Sigma_s| < \varepsilon$, незав. от выбора
 $M_i \in \Phi_i$

Всп. Если $\exists$ пределы I_1 инт. сумм Σ_1
 при $\Delta \rightarrow 0$, то они кр. поверхностными
 интегралами 1-го рода от f по Φ

Меню № 25
 24.11.10

$$I_1 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Sigma_1 = \iint_{\Phi} f(M) d\sigma$$

$f(x, y, z)$

Всп. Если $\exists$ пределы I_s , $s=2,3,4$ инт. сумм Σ_s при $\Delta \rightarrow 0$, то они
 кр. поверхностными интегралами 2-го рода от ф-ций P, Q, R по Φ

$$I_2 = \iint_{\Phi} P(M) \cos \chi d\sigma, \quad I_3 = \iint_{\Phi} Q(M) \cos \psi d\sigma, \quad I_4 = \iint_{\Phi} R(M) \cos \gamma d\sigma$$

Общий поверхностный интеграл 2-го рода:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \iint_{\Phi} (P \cos \chi + Q \cos \psi + R \cos \gamma) d\sigma = \iint_{\Phi} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma$$

$$\vec{A} = \{P, Q, R\}, \quad \vec{n} = \{\cos \chi, \cos \psi, \cos \gamma\}$$

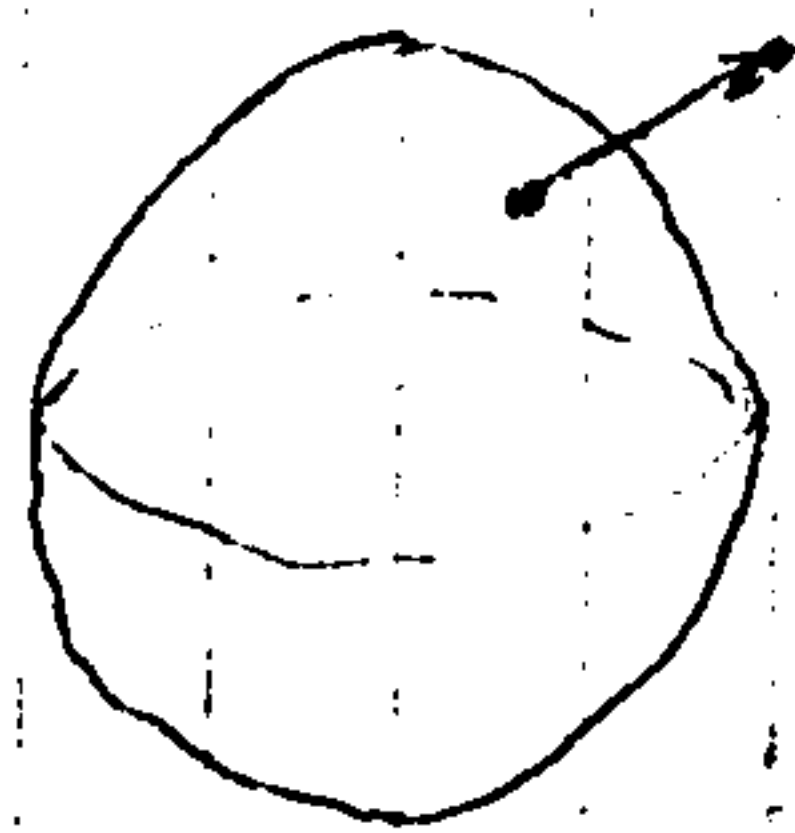
Из вып. $\Rightarrow$ кр. инт. 1-го рода не зависят от выбора ориентации пов-ти,
 а инт. 2-го рода — зависят, они изменяют знак на противоположный при
 изменении стороны пов-ти.

из стр. $\Rightarrow$, что инт. 1-го рода и общий инт. 2-го рода не зависят от выбора с.к. в E^3 .

Замечание. 1. Физический смысл

Инт. 1-го рода даёт массу нагруженной пов-ти с распределением массы $f(u)$ вдоль этой пов-ти.

Общ. инт. 2-го рода равен потоку вектора $\vec{P}$ чрез пов-ть Φ .



1. Если пов-ть Φ явл. замкнутой ($\neq$ сфера), то в каждой в-ра нормали $\vec{n}_u \perp \Phi$ выбирается внешняя нормаль по отн. к инт-ву огранич. пов-тью.

3. Поворотом инт-ла 2-го рода можно $\angle$ как пов. инт. 1-го рода от ф-ций $\cos \chi$, $\cos \psi$, $\cos \gamma$.

Теорема 3. Пусть пов-ть Φ уровн. 5-чл. (4) и соответств. ур-ни $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ (вектор ф-ция) или $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \bar{G}$ - ур. замкн. крив. инт-во. ф-ции f, P, Q, R непрер. на Φ .

Тогда $I_{1,2,3,4} - \exists$ и справедливы:

$$I_1 = \iint_{\Phi} f(u) d\sigma = \iint_{\bar{G}} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\sqrt{ED-F^2}}{|\vec{r}_u, \vec{r}_v|} du dv = I_0 \quad (1)$$

$$I_2 = \iint_{\Phi} P(u) \cos \chi d\sigma = \iint_{\bar{G}} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cos \chi \sqrt{ED-F^2} du dv$$

$I_{3,4} \dots$

Д-во: докажем для I_1 ($I_{2,3,4}$ аналогично в силу замеч. 3) выберем I_0 в правой части (1) $\exists$, т.к. все ф-ции непрер.

$$\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i, \quad \bar{G} = \bigcup_{i=1}^n \bar{G}_i, \quad \bar{G}_i - \text{ур. замкн. крив. инт-во.}$$

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^n \iint_{\Phi_i} f(u) d\sigma = \sum_{i=1}^n \iint_{\bar{G}_i} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{ED-F^2} du dv$$

$$I_0 = \sum_{i=1}^n \iint_{\bar{G}_i} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{ED-F^2} du dv$$

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \Sigma_1 \rightarrow I_0$$

$$I_0 - \Sigma_1 = \sum_{i=1}^n \iint_{\bar{G}_i} [f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) - f(x_i, y_i, z_i)] \sqrt{ED-F^2} du dv$$

$f(x)$ - непрер. непрер. на Φ : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall M, M_i \in \Phi$
 $\rho(M, M_i) < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M_i)| < \varepsilon$
 $\delta = |\Phi|$ - площадь пов-ти Φ . (7.2)

Пусть $\Delta < \delta$: $|I_0 - \Sigma_1| < \frac{\varepsilon}{\delta} \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} \sqrt{ED - F^2} \, du \, dv = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \delta = \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma_1 = I_0$$

Замечание. Пусть пов-ть Φ явл. графиком непрер. функ. $z = z(x, y)$

$$\Phi: \vec{r} = \{x, y, z(x, y)\}$$

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = [\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \{-z'_x, -z'_y, 1\}$$

$$\cos \chi = \frac{c}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{1}{\sqrt{ED - F^2}}$$

$$\iint_{\Phi} R(u) \cos \chi \, d\sigma = \iint_{\Phi} R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{ED - F^2}} \cdot \sqrt{ED - F^2} \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{\Phi} R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy \equiv \iint_{\Phi} R(x, y, z) \, dx \, dy$$

$$\forall \Phi \quad \iint_{\Phi} (P \cos \chi + Q \cos \psi + R \cos \chi) \, d\sigma \equiv \iint_{\Phi} P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy$$

Глава 7. Основные операции теории полей.

$u(u)$ - скалярное поле на G : $\forall \tau, M \in G \rightarrow u(u) \quad \{u(u)\}$ - ск. поле

$\vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(u)$ - векторное поле на G : $\forall \tau, M \in G \rightarrow \vec{p}(u) \quad \{\vec{p}(u)\}$ - век. поле

$\vec{r}$ - радиус-вектор τ, M

§1. Дивергенция и ротор линейного оператора.

E^3 , базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = \{\vec{e}_i\}$

f - скал. поле
 $\text{grad } f = \{f_x, f_y, f_z\}$
 - век. поле

ортонормированный базис: $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad i \neq j$

ортонормированный базис: $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Базис $\{\vec{e}^i\}$ - дуальный (взаимн.) с $\{\vec{e}_i\}$, если $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

ОНБ $\vec{e}_i = \vec{e}^i$

$\forall \{\vec{e}_i\} \exists!$ дуал. $\{\vec{e}^i\}$

$$\vec{e}^1 = \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Две пары дуал. базисов $\{\vec{e}_i, \vec{e}^i\}, \{\vec{e}'_i, \vec{e}'^i\}$

$$\vec{e}'_i = b_i^j \vec{e}_j, \quad \vec{e}_i = b_i'^j \vec{e}'_j \quad (1)$$

$$b_i'^j \vec{e}'_j = \sum_{j=1}^3 b_i'^j \vec{e}'_j = b_i'^1 \vec{e}'_1 + b_i'^2 \vec{e}'_2 + b_i'^3 \vec{e}'_3$$

м-ча $(b_i^j) (b_i'^j)$ - в. обратные

$$(b_i^j) \cdot (b_i'^j) = E = (\delta_i^j) - \text{ег. м-ча}$$

$$\vec{z}^{i'} = \tilde{b}_{i'}^i \vec{z}^i, \quad \vec{z}^i = \tilde{b}_i^{i'} \vec{z}^{i'} \quad (2) \quad (\tilde{b}_{i'}^{i'}) \text{ и } (\tilde{b}_i^{i'}) \text{ в. обратные}$$

$$\text{Д-ли, что } (\tilde{b}_{i'}^i) = (\tilde{b}_i^{i'})$$

1ое р-во в (1) умножим на $\vec{z}^k$

2ое р-во в (2) умножим на $\vec{z}_{k'}$

$$(\vec{z}_i, \vec{z}^k) \stackrel{(1)}{=} (\tilde{b}_{i'}^i \vec{z}_i, \vec{z}^k) \stackrel{\text{лин.}}{=} \tilde{b}_{i'}^i (\vec{z}_i, \vec{z}^k) = \tilde{b}_{i'}^i \delta_i^k = \tilde{b}_{i'}^k$$

$$(\vec{z}_{k'}, \vec{z}^i) \stackrel{(2)}{=} (\vec{z}_{k'}, \tilde{b}_i^{i'} \vec{z}^{i'}) \stackrel{\text{лин.}}{=} \tilde{b}_i^{i'} (\vec{z}_{k'}, \vec{z}^{i'}) = \tilde{b}_i^{i'} \delta_{k'}^{i'} = \tilde{b}_i^{i'}$$

if $i' = k', i = k \Rightarrow$ лев. части равны $\Rightarrow$ равны и правые части: $\tilde{b}_{i'}^i = \tilde{b}_i^{i'} \quad \forall i, i' = \overline{1, 3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{в ф-лах (1) левую можно упр-ть} \Rightarrow \vec{z}_{i'} = \tilde{b}_{i'}^i \vec{z}_i, \quad \vec{z}^i = \tilde{b}_i^{i'} \vec{z}^{i'} \quad (3)$$

Линейный оператор $A: E^3 \rightarrow E^3$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha A\vec{a} + \beta A\vec{b} \in E^3$$

$$\neq A\vec{z} = \lambda \vec{z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$A\vec{z} = [\vec{a}, \vec{z}], \quad \vec{a} = \text{const}$$

$$A\vec{z} = (\vec{a}, \vec{z}) \vec{a}$$

$$A\vec{z} = \vec{z} + \vec{a}, \quad \vec{a} = \text{const} \neq \vec{0} \quad - \text{ не л.о.}$$

$$A\vec{z} = (\vec{a}, \vec{z}) \in E^1 \quad - \text{ не л.о.}$$

Упр. 1 Пусть $\{\vec{z}_i, \vec{z}^{i'}\}$ — базисы в E^3

$$A \in \mathcal{L}(E^3, E^3)$$

След. величина: $\sum_{i=1}^3 (\vec{z}_i, A\vec{z}^{i'}) = \sum_{i=1}^3 (\vec{z}^{i'}, A\vec{z}_i)$ инвариантна
относ. выбора базиса в пр-ве и наз. дивергенцией л.о. A
(divergence - расходимость)

$$\text{div } A = (\vec{z}_i, A\vec{z}^i)$$

$$\# A = I \quad \text{div } I = (\vec{z}_i, I\vec{z}^i) = (\vec{z}_i, \vec{z}^i) = 3$$

Д-во: $\Delta \forall$ гр. базис. пар базисов $\{\vec{z}_{i'}, \vec{z}^{i'}\}$

$$\begin{aligned} (\vec{z}_{i'}, A\vec{z}^{i'}) &\stackrel{(3)}{=} (\tilde{b}_{i'}^i \vec{z}_i, A\tilde{b}_k^{i'} \vec{z}^k) \stackrel{\text{лин. оп.}}{=} \underbrace{\tilde{b}_{i'}^i}_{\text{лин. ск. пр. по } i'} \underbrace{\tilde{b}_k^{i'}}_{\text{в. обр. л.о. по } i'} (\vec{z}_i, A\vec{z}^k) = \\ &= \delta_k^i (\vec{z}_i, A\vec{z}^k) = (\vec{z}_i, A\vec{z}^i) \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } \vec{z}_{i'} = \vec{z}^i, \quad \vec{z}^{i'} = \vec{z}_i$$

$$\{\vec{z}_i, \vec{z}^i\}, \{\vec{z}^i, \vec{z}_i\} - \text{базис. базис. по лем. упр. } (\vec{z}_i, A\vec{z}^{i'}) = (\vec{z}^i, A\vec{z}_i)$$

Ув.2 Суммарная величина $\sum_{i=1}^3 [\vec{r}_i, A \vec{r}_i] = \sum_{i=1}^3 [\vec{r}_i, A \vec{r}_i]$ - инварианта от. выбора базиса и маж. rotations (rotation - вращение) (выпр)

$$\text{rot } A = [\vec{r}_i, A \vec{r}_i]$$

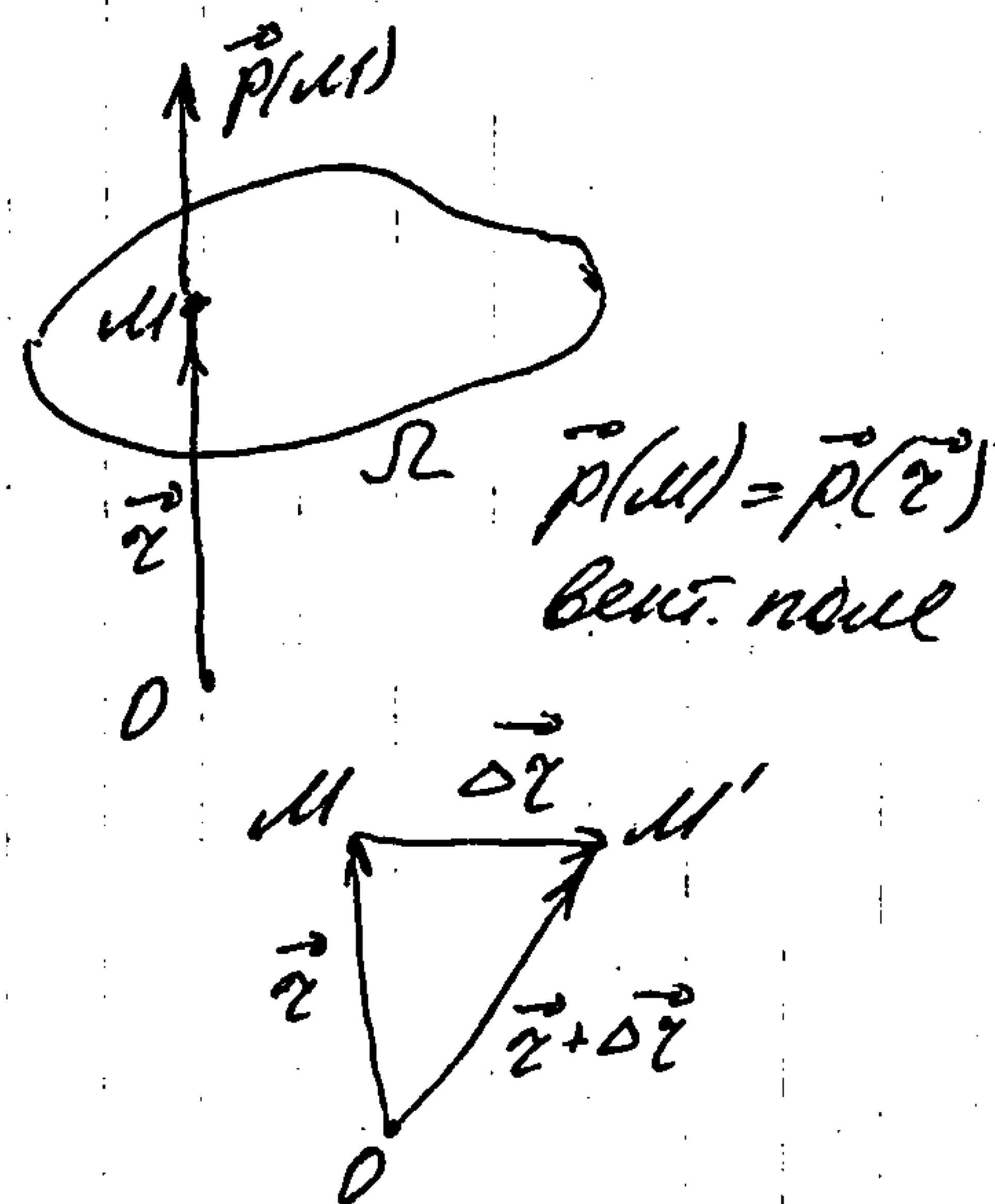
Док-во $\Rightarrow$ из предыд. док-ва заменим ск. пр. на век. пр. (или по номер. аргументу)

$$\text{rot } I = [\vec{r}_i, \vec{r}_i] \Big|_{\{\vec{r}_i\}-\text{ОНБ}} = [\vec{r}_i, \vec{r}_i] = \vec{0}.$$

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Лекция №26
29.11.10

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p}(u) &= \Delta \vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \vec{p}(\vec{r}) = \\ &= \vec{p}(u') - \vec{p}(u) - \text{приращение вект. поля,} \\ &\quad \text{обтекающее приращению аргумента } \Delta \vec{r}. \end{aligned}$$



Впр Вект. поле $\vec{p}(\vec{r})$ маж. дифференцир. в т.м, если приращение вект. поля $\Delta \vec{p}(\vec{r})$, обтекающее приращению арг. $\Delta \vec{r}$, представимо в виде:

$$\Delta \vec{p}(\vec{r}) = A \Delta \vec{r} + \vec{0} (|\Delta \vec{r}|) \quad (1)$$

где $A: E^3 \rightarrow E^3$ - л.о., не зависящий от $\Delta \vec{r}$, $A = A(\vec{r}) = A(u)$

$$\vec{0} (|\Delta \vec{r}|) - \text{вектор, такой что } \frac{\vec{0} (|\Delta \vec{r}|)}{|\Delta \vec{r}|} = \vec{0} (1) \rightarrow \vec{0} \text{ при } |\Delta \vec{r}| \rightarrow 0$$

$$\# A: \Delta \vec{r}, \vec{r}(\Delta \vec{r}, \vec{r})$$

$$\vec{0} (|\Delta \vec{r}|): \vec{r}(\Delta \vec{r}, \Delta \vec{r}) = \vec{r} \Delta \vec{r}^2$$

$$\propto |\Delta \vec{r}|^2, \Delta > 1 \quad \Delta \vec{r}(\vec{r}, \Delta \vec{r})$$

$$\vec{p}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \Delta \vec{p}(\vec{r}) = \vec{r} + \Delta \vec{r} - \vec{r} = \Delta \vec{r} \quad A = I, \quad \vec{0} (|\Delta \vec{r}|) = \vec{0}.$$

диф. в E^3

Поле $\vec{p}(\vec{r})$ маж. дифференцир. на Ω , если оно дифр. в $\forall: u \in \Omega$.

Ув.3 Если поле $\vec{p}(\vec{r})$ дифференцируемо в т.м, то предст. (1) спр. отсюда.

$$\begin{aligned} \text{Д-во: Пусть } \Delta \vec{p}(\vec{r}) &= A \Delta \vec{r} + \vec{0}_1 (|\Delta \vec{r}|) \\ \Delta \vec{p}(\vec{r}) &= B \Delta \vec{r} + \vec{0}_2 (|\Delta \vec{r}|) \\ \vec{0} &= (A - B) \Delta \vec{r} + \vec{0} (|\Delta \vec{r}|) \quad | : |\Delta \vec{r}| \neq 0 \end{aligned}$$

$$\vec{0} = (A-B)\vec{e} + \vec{0}(1) \quad |\vec{0}| \rightarrow 0$$

$$\vec{e} = \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|}$$

$$(A-B)\vec{e} = \vec{0} \quad \forall \vec{e} \text{ (в том числе и для базиса)} \Rightarrow A-B=0, \text{ т.е. } A=B.$$

Опр. Дивергенцией вект. поле $\vec{p}(\vec{r})$ наз. дивергенция мат. от A из представления (1).

$$\operatorname{div} \vec{p}(\vec{r}) = \operatorname{div} A = \operatorname{div} A(\vec{r}) = (\vec{e}_i, A \vec{e}^i), \quad \forall \{\vec{e}_i, \vec{e}^i\} - \text{базис базиса.}$$

$$\operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div} I = 3$$

$$\text{расходимость вект. поле} \sim \operatorname{div} \vec{p}(\vec{r})$$

Опр. Ротором вект. поле $\vec{p}(\vec{r})$ наз. ротор мат. от A из (1):

$$\operatorname{rot} \vec{p}(\vec{r}) = \operatorname{rot} A = [\vec{e}_i, A \vec{e}^i] \quad \forall \{\vec{e}_i, \vec{e}^i\}$$

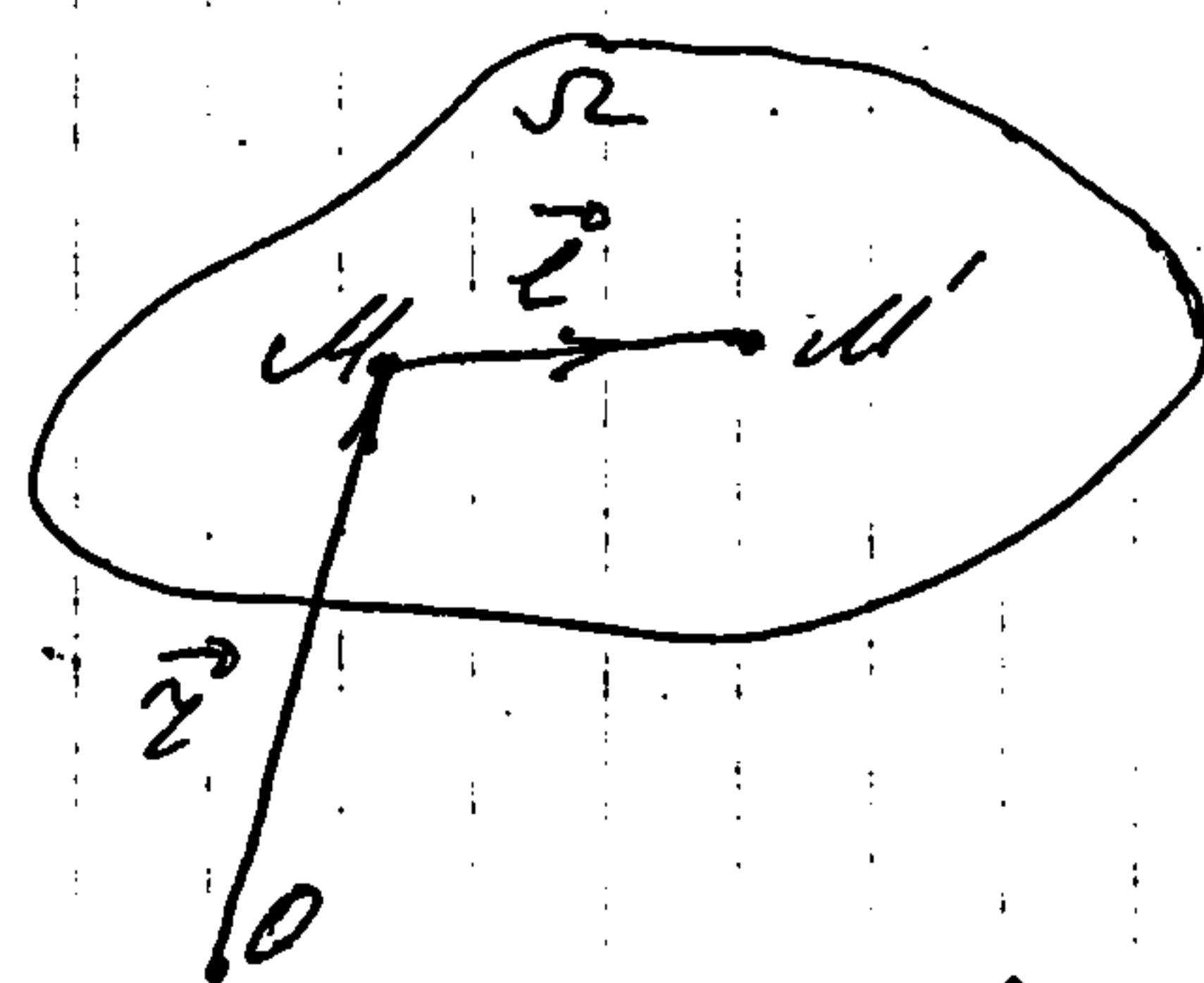
$$\operatorname{rot} \vec{r} = \operatorname{rot} I = \vec{0}.$$

Δ вект. поле $\vec{p}(\vec{r})$ в одн. Ω

$$\forall \vec{e} \quad \Delta \vec{r} = \vec{M}M'$$

$$|\Delta \vec{r}| = l, \quad \Delta \vec{r} = l \vec{e}$$

$$\Delta \vec{p}(\vec{r}) \sim \text{ответ. } \Delta \vec{r}.$$



Опр. Производной вект. поле $\vec{p}(\vec{r})$ в т. M наз. предел (или от $\exists$) отношения приращ. вект. поле $\Delta \vec{p}(\vec{r})$, ответ. $\Delta \vec{r}$, к длине $\Delta \vec{r}$ приращ. l :

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta \vec{r}} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}(\vec{r})}{l}$$

$f(x, y, z) = f(u)$ - скалярная ф-ция

$$\frac{\Delta f}{\Delta \vec{r}} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{l} = (\vec{e}, \operatorname{grad} f)$$

$$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$$

Лем. 4 Пусть поле $\vec{p}(\vec{r})$ зад. в т. $M \in \Omega$. Тогда $\forall \vec{e} \quad \frac{\Delta \vec{p}(\vec{r})}{\Delta \vec{r}} = A(\vec{r}) \vec{e}$,
где A - мат. от из опр. (1).

До-во: (1): $\Delta \vec{p}(\vec{r}) = A \Delta \vec{r} + \vec{0}(|\Delta \vec{r}|) : l \neq 0$

$$\frac{\Delta \vec{p}(\vec{r})}{l} = A \left(\frac{\Delta \vec{r}}{l} \right) + \vec{0}(1) = A \vec{e} + \vec{0}(1)$$

$$l \rightarrow 0 \Rightarrow \exists \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}(\vec{r})}{l} = A \vec{e} = \frac{\Delta \vec{p}(\vec{r})}{\Delta \vec{r}}$$

в ОНБ $i, j, k, \partial x, \partial y, \partial z$

$$\text{rot } \vec{p}(\vec{r}), \text{div } \vec{p}(\vec{r}), \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{r}} - ?$$

Пусть $\vec{p}(\vec{r})$ задан в $\mathcal{M}$

$$\vec{p}(\vec{r}) = \{P, Q, R\} \text{ в ОНБ } i, j, k$$

$p = p(\mu) = p(x, y, z)$ — скалярная ф-ция

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{r}} = \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}(\vec{r})}{\vec{r}} = \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \frac{1}{\vec{r}} \{\Delta P, \Delta Q, \Delta R\} = \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta P}{\vec{r}}, \frac{\Delta Q}{\vec{r}}, \frac{\Delta R}{\vec{r}} \right\} =$$

$$= \left\{ \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\vec{r}}, \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\vec{r}}, \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\vec{r}} \right\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial \vec{r}}, \frac{\partial Q}{\partial \vec{r}}, \frac{\partial R}{\partial \vec{r}} \right\} = \{(\vec{r}, \text{grad } P), (\vec{r}, \text{grad } Q), (\vec{r}, \text{grad } R)\}$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{r}} = \{(\vec{r}, \text{grad } P), (\vec{r}, \text{grad } Q), (\vec{r}, \text{grad } R)\}$$

Тогда $\mathcal{M}$ -мат. A в ОНБ

$$A_i = \alpha i + \beta j + \gamma k \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$$A_i = \frac{\partial \vec{p}}{\partial i} = \{(i, \text{grad } P), (i, \text{grad } Q), (i, \text{grad } R)\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x} \right\}$$

$$\text{grad } P = \left\{ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right\} \quad (i, \text{grad } P) = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$A_j = \frac{\partial \vec{p}}{\partial j} = \{(j, \text{grad } P), \dots\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} \right\}, \quad A_k = \left\{ \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial z} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ — матрица оператора } A \text{ в ОНБ.}$$

$$\text{div } \vec{p}(\vec{r}) = (i, A_i) + (j, A_j) + (k, A_k) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

в ОНБ —

Сумма по всем k слагаемым

$$\text{div } \vec{p}(\vec{r}) = (\nabla, \vec{p}(\vec{r})) \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad \vec{p} = \{P, Q, R\}$$

$$\text{div } \vec{p}(\vec{r}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{tr } A. \quad (\text{сум. диагональ матрицы})$$

$$\text{div } \vec{r} = \text{div } \{x, y, z\} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

$$\text{rot } \vec{p}(\vec{r}) = [i, A_i] + [j, A_j] + [k, A_k] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ i & 0 & 0 \\ P_x & Q_x & R_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & i & 0 \\ P_y & Q_y & R_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & i \\ P_z & Q_z & R_z \end{vmatrix}$$

$$= \{0, -R_x, Q_x\} + \{R_y, 0, -P_y\} + \{-Q_z, P_z, 0\} = \{R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y\}$$

$$\text{rot } \vec{p}(\vec{r}) = \{ R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y \} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

$$\text{rot } \vec{p}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{p}(\vec{r})]$$

$$\text{rot } \vec{r} = \text{rot } \{x, y, z\} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right\} = \{0, 0, 0\} = \vec{0}.$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{r}} = A \vec{e} \quad \vec{e} = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$$

$$\begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \cos \alpha + P_y \cos \beta + P_z \cos \gamma \\ Q_x \cos \alpha + Q_y \cos \beta + Q_z \cos \gamma \\ R_x \cos \alpha + R_y \cos \beta + R_z \cos \gamma \end{pmatrix} =$$

$$= (P_x \cos \alpha + P_y \cos \beta + P_z \cos \gamma) i + (Q_x \cos \alpha + Q_y \cos \beta + Q_z \cos \gamma) j + (\dots) k = \{ (\vec{e}, \nabla P), (\vec{e}, \nabla Q), (\vec{e}, \nabla R) \}$$

§3. Основные операции теории полей.

Скалярное поле $u(x, y, z)$, векс. поле $\vec{p}(\vec{r})$

Пусть $u(x, y, z), \vec{p}(\vec{r})$ — функции заданные в Ω

к $\text{grad } u$, $\text{div } \vec{p}$, $\text{rot } \vec{p}$ применимы операции теории полей
векс. поле скал. поле векс. поле

$$\left. \begin{array}{l} \text{div grad } u, \text{rot grad } u \\ \text{grad div } \vec{p} \\ \text{div rot } \vec{p}, \text{rot rot } \vec{p} \end{array} \right\} 5 \text{ операций}$$

$$\text{rot grad } u = \vec{0} \quad \text{операции инвариантны от выбора базиса} \Rightarrow \Delta \text{ ОНБ}$$

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \quad \text{div } \vec{p} = P_x + Q_y + R_z$$

$$\text{rot } \vec{p} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

$$\text{rot grad } u = \left\{ u_{zy} - u_{yz}, u_{xz} - u_{zx}, u_{yx} - u_{xy} \right\} = \vec{0}$$

$$\text{div rot } \vec{p} = \text{операции инвариантны от выбора базиса} \Rightarrow \Delta \text{ ОНБ}$$

$$\text{div rot } \vec{p} = (\underline{R_{yx}} - \underline{Q_{zx}}) + (\underline{P_{zy}} - \underline{R_{xy}}) + (\underline{Q_{xz}} - \underline{P_{yz}}) = 0$$

$\operatorname{div} \operatorname{grad} u \equiv \Delta u$ - оператор Лапласа.

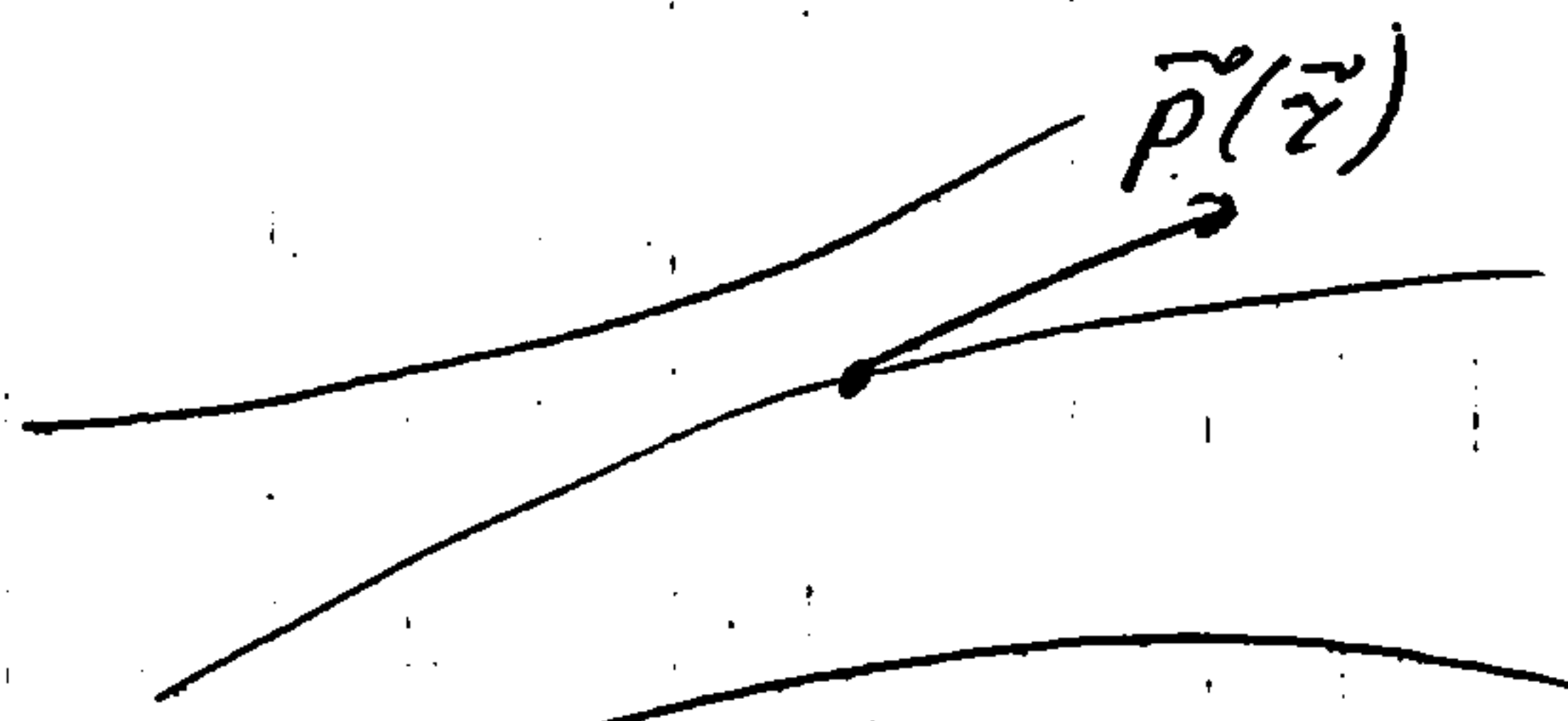
в ОНБ: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$u_t - \Delta u = f$ теплопр.
 $u_{tt} - \Delta u = f$ струна

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{p} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{p} - \Delta \vec{u}$ $\vec{u}$ в ОНБ: $\Delta \vec{u} = \{\Delta u, \Delta v, \Delta w\}$

$\vec{p}(\vec{r})$ - век. поле удовлетворяющее условиям нестационарной жидкости.

$\operatorname{div} \vec{p}(\vec{r}) > 0$ - характеризует
 (< 0) интенсивность
 источников (стоков)



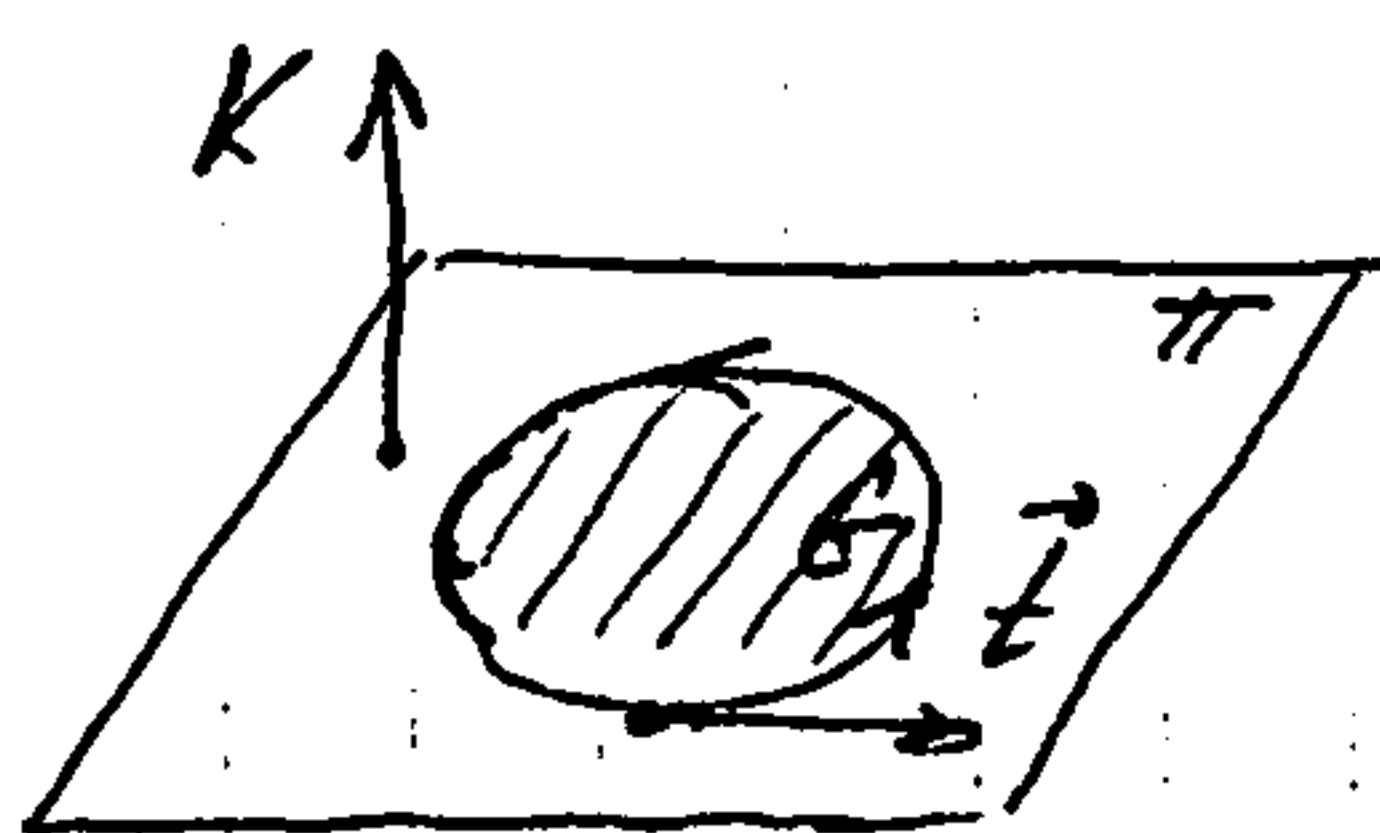
$\operatorname{rot} \vec{p}(\vec{r}) = \vec{\omega}$, $\vec{\omega}$ - угловая скорость движения.

§4 Интегральные формулы математического анализа.

1° Формула Грина.

Лекция N 27
1.12.10.

E^3
 Π -пл-ть $\vec{n}$
 $\vec{n} \perp \Pi$



Обл. G - односвязная,
 $G \subset \Pi$, вып. 1-чл.

1) $\partial G = C$ - замкнутая без свободных точек

2) $\exists Oxy$ на Π : для Ox и Oy $\forall$ прямой Π сами пересекает C не более, чем в 1-х точках

$\vec{G} = G \cup C$

$\vec{e}$ - ед. вектор нормали к C , совпадающий с век. нормалью $\vec{n}$
 (т.е. направление $\vec{e}$ совпадает с напр. полнот. обхода контура C)

Теорема 1. Пусть обл. G удовл. указанным условиям, на G задано век. поле $\vec{p}(\vec{r})$ - непрер. на G , дифференцируемое на G и $\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{e}}$, $\forall \vec{e}$, непрер. на G

Тогда справедлива след. ф-ла:

$\iint_G (\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{p}) dG = \oint_C (\vec{p}, \vec{e}) dL$ (1) - ф-ла Грина (в инвар. форме отн. выбора базиса)

Интеграл в (1) $\exists$, т.к. все ф-ции непрер.

Физический смысл

Л. 2. - поток вект. $\vec{p}$ (rot) вект. $\vec{p}$

Пр. 7. - циркуляция вект. $\vec{p}$ по $\odot$ (работа по перем. и. точки вдоль $\odot$ по д-ви силы $\vec{p}$)

Д-во: Все величины в (1) инвариантны от выбора дуги $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ доказано в ОНБ.

Оху: Оху в π выбираем так, чтобы вект. ун. 2) на $\odot$
 $\odot_2$ - дуга $\odot$.

$$\vec{p} = \{P, Q, R\}, \quad \vec{k} = \{0, 0, 1\}$$

$$\vec{k}, \text{rot} \vec{p} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$G: z = z(x, y) = 0 \Rightarrow dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = dx dy$$

$$\text{Ф-ла в ОНБ: } \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta) d\ell =$$

$$= \int_C P dx + Q dy \quad (2) \text{ - ф-ла Грина в ОНБ.}$$

Докажем справедливость (2) покомпонентно - для P и для Q

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx \quad (3)$$

$$\text{проект } G = [x_1, x_2]$$

$\forall$ прямая $x = x_0 \in [x_1, x_2]$
 пересекает G не более чем в 1х т.:

$$y_1(x) \leq y_2(x)$$

$$C = C_1 \cup C_2$$

$$C_1: y = y_1(x)$$

$$C_2: y = y_2(x)$$

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2(x)) dx =$$

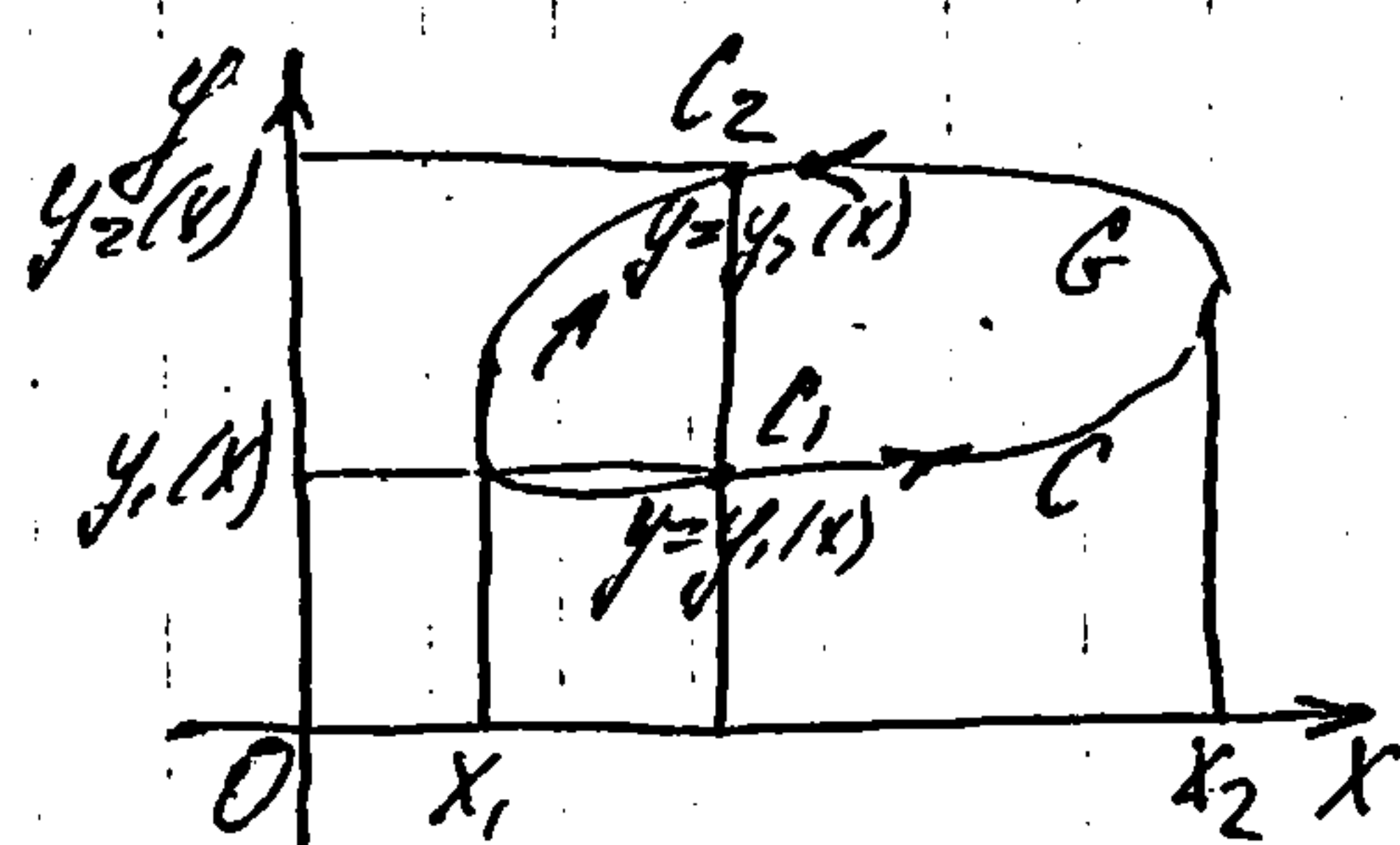
$$\overset{\substack{\text{по ф-ле} \\ \text{вект. кривой. инт.}}}{=} \int_{C_1} P(x, y) dx - \left(- \int_{C_2} P(x, y) dx \right) = \oint_C P(x, y) dx \Rightarrow \begin{array}{l} (3) \text{ доказано} \\ \downarrow \\ (2) \text{ доказано} \\ \downarrow \\ (1) \text{ доказано} \end{array}$$

$$(x, y_1(x)) \in C_1$$

$$(x, y_2(x)) \in C_2$$

в обратн. напр.

$$\forall x \in [x_1, x_2]$$



Замечание 1. Усл. 1) на C можно убрать и Δ в том же, что их можно $G = \bigcup G_i$, где G_i вып. для усл. Т.1 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ верно (1) $\forall G_i$

$$\sum_{i=1}^n \iint_{G_i} \dots = \iint_G \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \oint_{G_i} = \oint_C$$



т.к. $\oint_{G_i}$ — это разность $\int$ и $-\int$ — остаётся $\oint \Rightarrow$ (1) справедлива.

2. $\partial G = C$ может быть кусочно-гладкой, без 1) $\Rightarrow$ формула (1) верна, если C —

③ — может быть спрямляемой кривой $\Rightarrow$ формула (1) верна.
 (Полудак Э.Г., Милин Е.В. ДАН 1980г.)

3. Поле $\vec{p}(\vec{r})$ м.б. таким: непрер. в $\bar{G}$, диф. в G , $\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{r}}$, $\forall \vec{r} \in G$ непрер. в G

формула (1): $\iint_{\substack{G \\ \text{несобств. м.б.-п.}}} (\vec{r}, \text{rot } \vec{p}) d\vec{v} = \oint_C (\vec{p}, \vec{\tau}) d\ell$

2° Формула Остроградского — Гаусса.

Пусть V — ограниченная обл. в E^3

$\partial V = \Phi$, т.е. удовлетв. 5 усл. (*) из §1 (усл. 5 — полная пов-ть).

$\exists Oxyz$: для Ox, Oy, Oz $\forall$ прямая, $\parallel$ оси, пересек. Φ не более, чем в 1-х точках.

$\vec{n} \perp \Phi$ — внешняя нормаль к Φ .

Теорема 2

Пусть V и Φ удовлетв. указанным усл.
 На $\bar{V} = V \cup \Phi$ задано вект. поле $\vec{p}(\vec{r})$, непрер. на $\bar{V}$,
 дифференц. на V и $\forall \vec{r} \in V \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{r}}$ непрер. на $\bar{V}$

Тогда справедлива след. формула:

$$\iiint_V \text{div } \vec{p} d\vec{v} = \iint_{\Phi} (\vec{p}, \vec{n}) d\sigma \quad \text{--- формула Остроградского — Гаусса}$$

(1) (в инт. обл. выбора базиса для интеграла)

Д-во: Все формулы в (1) непрер. $\Rightarrow$ м.б. в (1) $\exists$.

Все величины инвар. относительно выбора базиса в $E^3 \Rightarrow$ гл. д-во (1) в он

выбираем $Oxyz$ так, что вект. ун. на $\Phi \Rightarrow \vec{p} = \{P, Q, R\}$

$$\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

$$d\vec{v} = dx dy dz \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Phi} (P \cos \alpha +$$

$$+ Q \cos \gamma + R \cos \alpha) d\sigma = \oint_{\Phi} P dx dy + R dy^x dz + R dy dz \quad (2) - \text{по-прежнему в ОНБ.}$$

Далее (2) равносильно для P, Q, R

$$\text{для } R: \iiint_{\bar{V}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oint_{\Phi} R dy dx$$

$$\text{при } \bar{V} = \Omega, \quad \Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$$

$$\Phi_1: z = z_1(x, y), \quad \Phi_2: z = z_2(x, y)$$

$$\iiint_{\bar{V}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} R(x, y, z) dz =$$

$$= \iint_{\Omega} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{\Omega} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy \quad \text{⊖}$$

⊖ Φ_2 против
вект. по-прежнему

$$\iint_{\Phi_2} R(x, y, z) \cos \alpha d\sigma = \iint_{\Omega} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{|\vec{r}_n|} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

$(\vec{0z}, \vec{n}) < \frac{\pi}{2}$

$$\ominus \iint_{\Phi_2} R(x, y, z) dx dy - (- \iint_{\Phi_1} R(x, y, z) dx dy) = \oint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy$$

$(\vec{n}, \vec{0z}) > \frac{\pi}{2}$

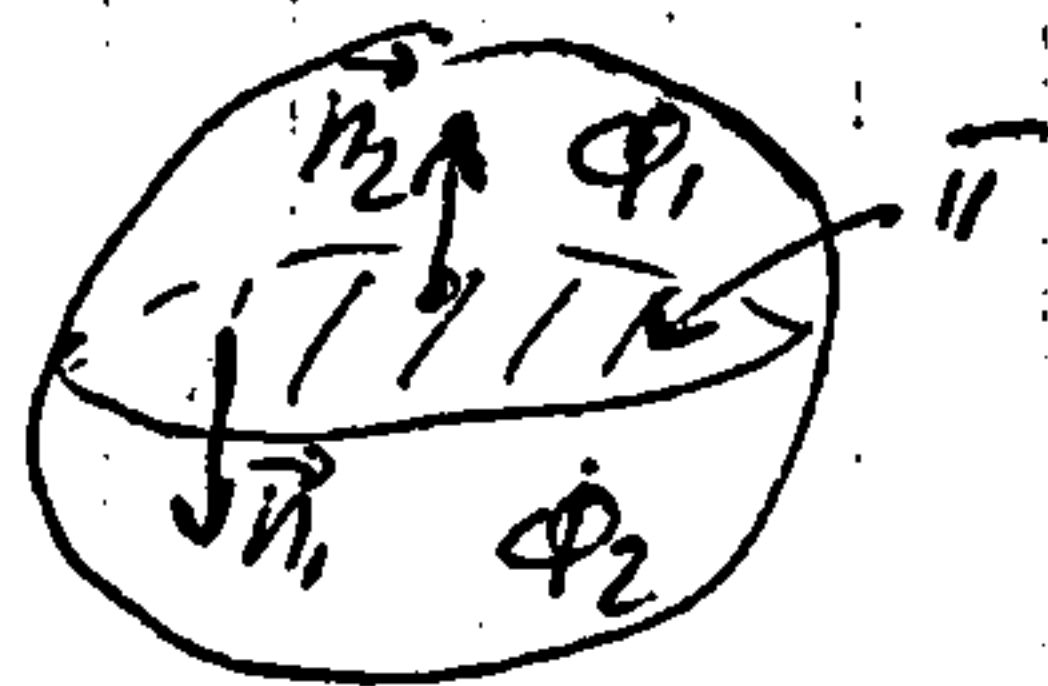
$$\cos \alpha = - \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

Аналогично для P, Q

Замечание. 1. $V: V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ — V_i упоряд. по-прежнему $\Rightarrow$ (1) $\forall V_i$ верна

$$\iiint_{V_i} \operatorname{div} \vec{p} dV = \oint_{\Phi_i} (\vec{p}, \vec{n}) d\sigma \quad \Big| \quad \sum_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \iiint_{V_i} \dots = \iiint_V$$



$$\sum_{i=1}^n \oint_{\Phi_i} \dots = \oint_{\Phi} \dots \text{ или 2-ого рода}$$

$\iint_{\Pi}$ — контр. ($\vec{n}_1, \vec{n}_2$ в разн. стороны)

2. Φ — нулевой-матрица $\Rightarrow$ (1) верна

3. Поле $\vec{p}$ — непрерыв. на $\bar{V}$, глупо. на V , $\frac{\partial \vec{p}}{\partial z} \forall \vec{e}$ — непрерыв. на V

$$(1): \iiint_V \operatorname{div} \vec{p} dV = \oint_{\Phi} (\vec{p}, \vec{n}) d\sigma$$

необход.
услов.

3° Формула Стокса.

Пусть Φ — ориентируемая пов-ть в E^3 , ориентация на контур C ,
 C — замкнутая кривая, ду свободных точек.

Φ удовл. 5 усл. (*) и $\S 1$, где 5) усл. — ориентируемая замкнутая кривая по той же пов-ти.

Выбираем $\vec{n} \perp \Phi$.

$\vec{r}$ — ед. вектор касательной к C , согласов.
с $\vec{n} \perp \Phi$.



Теорема 3. Пусть Φ удовл. указанным усл.
Вект. поле $\vec{r}(\vec{r})$ определено в некоторой окр-ти пов-ти Φ ,
непр. и непрерывно в этой окр-ти.

Тогда справедлива след. ф-ла:

$$\oint_{\Phi} (\vec{n}, \text{rot } \vec{r}) = \oint_C (\vec{r}, \vec{r}) d\ell \quad (1)$$

Φ поток вектора $\vec{r}$ C циркуляция $\vec{r}$ на C .

Д-во: (I) Пусть $\exists$ $Oxyz$ в E^3 , что Φ ортогон. проецируется на все 3 координат-ты.

$\vec{n} : \alpha, \beta, \gamma$ — острые углы.

$$\vec{r} = \{P, Q, R\}, \quad \vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

$$\vec{r} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

Лемма 128
6.12.10

(1) в ОНБ:

$$\text{rot } \vec{r} = \{R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y\}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Phi} [(R_y - Q_z) \cos \alpha + (P_z - R_x) \cos \beta + (Q_x - P_y) \cos \gamma] d\sigma = \\ = \oint_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\ell \quad (2) = \oint_C P dx + Q dy + R dz \end{aligned}$$

Д-во покомпонентно где P, Q, R

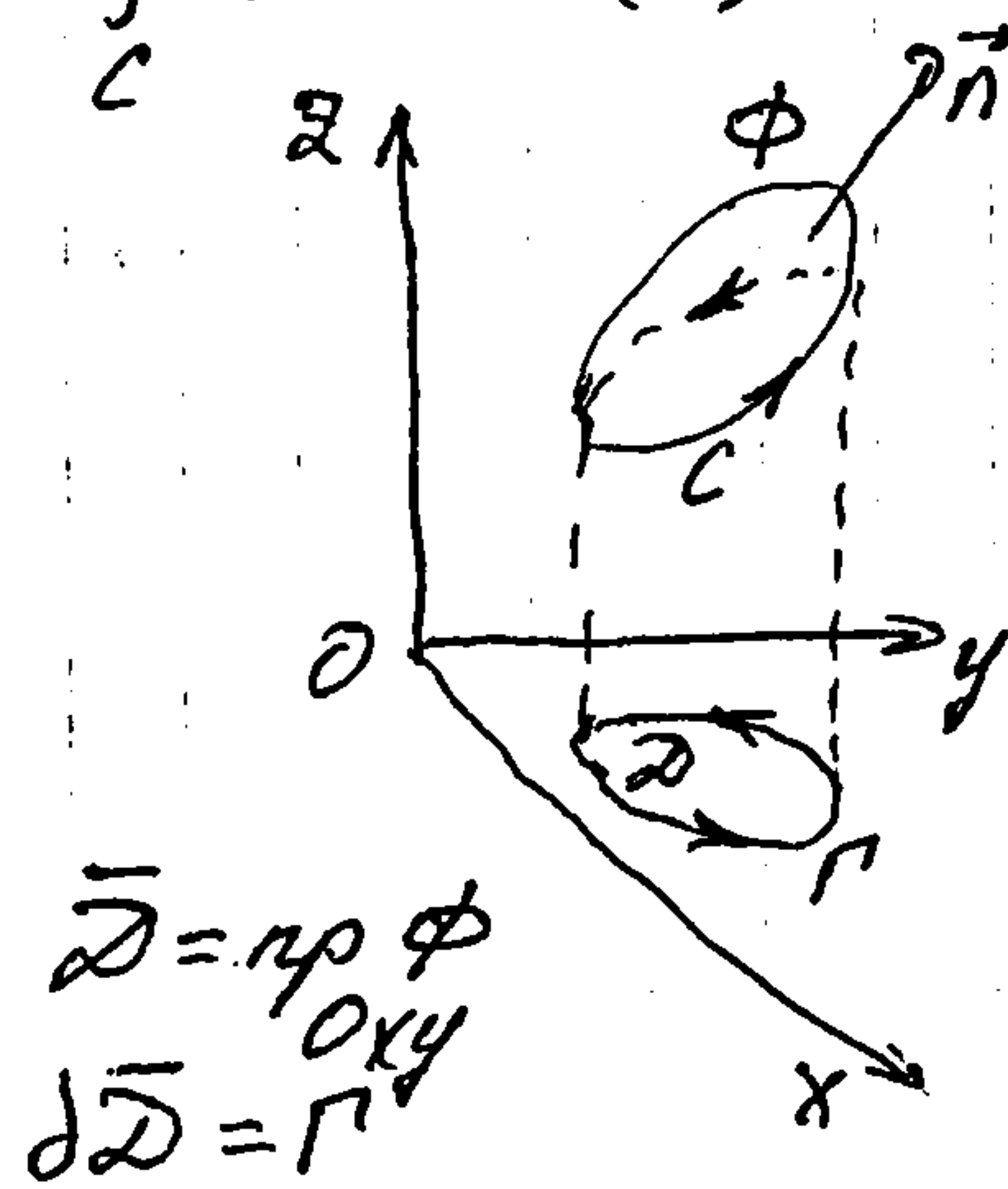
Д-во где P .

$$\oint_{\Phi} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma = \oint_C P \cos \alpha d\ell = \oint_C P dx \quad (3)$$

$\Phi : z = z(x, y)$ — график

$$\vec{r} = \{x, y, z(x, y)\}$$

$$\cos \beta = \frac{\begin{vmatrix} x_x & z_x \\ x_y & z_y \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} = \frac{-z_y'}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$



$\vec{D} = \text{пр } \Phi$
 $d\vec{D} = \gamma$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{vmatrix} x_x & y_x \\ x_y & y_y \end{vmatrix}}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \Rightarrow \cos \alpha = -z_y' \cos \alpha$$

$$-\iint_{\Phi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \alpha d\sigma = \iint_{\Omega} \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} dx dy \quad \text{--- (1)}$$

Ф-на Грина: $\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy \Big|_{Q=0} \quad \begin{matrix} (x, y) \in \Omega \\ (x, y, z(x, y)) \in \Phi \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \oint_{\Gamma} P(x, y, z(x, y)) dx = \oint_0 P(x, y, z) dx \Rightarrow (3) \text{ верна} \Rightarrow (2) \text{ верна} \Rightarrow (1) \text{ верна.}$$

②] Ж Огуз: Φ однозначно проецируется на 3 коорд. пл-ти

Лемма. Пусть поверхность Φ удовл. усл. Т.3. Тогда $\exists \delta > 0$:

$\forall \tilde{\Phi} \subset \Phi, d(\tilde{\Phi}) < \delta$ однозначно проецируется на 3 коорд. пл-ти в некоторой окр-ти Огуз, связанной с Φ .

Д-во: 1) Фикс. $\forall \tau. M_0 \in \Phi, \vec{n}_{M_0}$, касат. пл-ть к Φ в $\tau. M_0$.

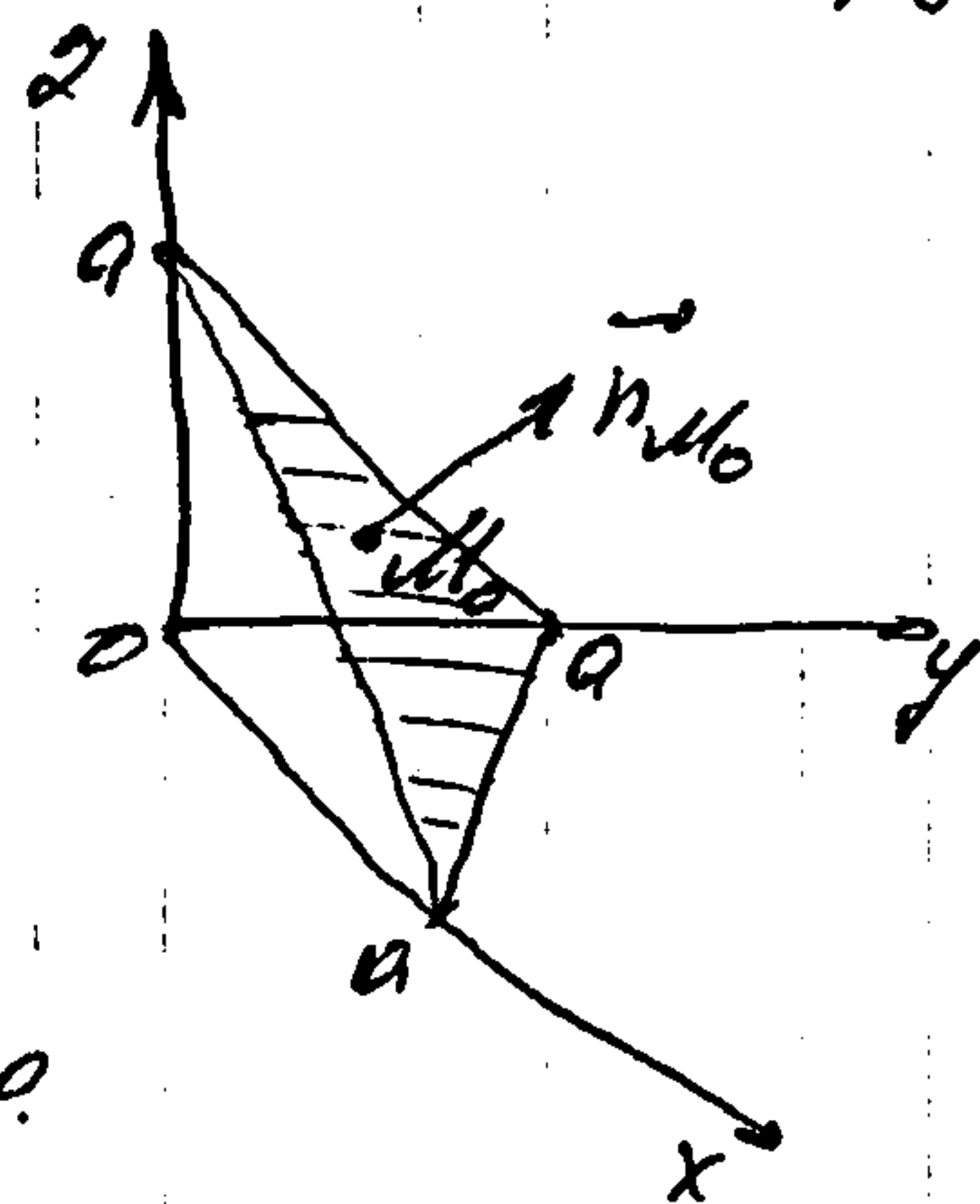
Огуз: касат. пл-ть отсекает равные отрезки на осях координат.

$\Rightarrow \vec{n}_{M_0}$ образует остр. углы с Ox, Oy, Oz

Рав-во тангенса $\Rightarrow \exists$ окр-ть $\tau. M_0$

$\tilde{M}$: все внеш. нормали к Φ в $\tilde{M}$ образуют остр. углы с осями $\Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{M}$ однозначно проецир. на все 3 коорд. пл-ти в Огуз.



2) Д-во, что $\exists \delta > 0: \forall \tilde{\Phi} \subset \Phi, d(\tilde{\Phi}) < \delta$ удовл. усл. леммы

III $\exists \delta > 0: \dots \Rightarrow \forall \epsilon_n = \frac{1}{n} \exists \Phi_n \subset \Phi, d(\Phi_n) < \delta_n$,

Φ_n не проецируется хотя бы на одну из координатных пл-тей в Огуз

Фикс. $\forall \tau. M_n \in \Phi_n$, норм-ть $\{M_n\}$

Φ -огранич. $\Rightarrow \{M_n\}$ - ср. $\Rightarrow \exists$ с-се предель. $M_{n_k} \rightarrow M_0$
 $M_0 \in \Phi$ - компактно

По зам-ку в 1) у $\tau. M_0 \exists$ окр-ть $\tilde{M}$: $\exists$ Огуз, $\tilde{M}$ един. проецир. на 3 коорд. пл. в некоторой Огуз.

т.к. $d(\Phi_{n_k}) \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} 0$, то $\exists N: \forall n_k > N \Phi_{n_k} \subset \tilde{M} \Rightarrow$

$\forall \Phi_{nk}, n_k > N$ — одному произвр. на 3 коорд. п-ти в $Oxyz$. — это произвольный выбор Φ_{nk} ?!

Д-во Т.3 II:

Разбиваем Φ на конечное число частей Φ_i , $d(\Phi_i) < \delta$, не имеющие общих внутр. точек

$\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$, Φ_i — произвр. на 3 коорд. п-ти в $Oxyz \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ верны ф-лы (1) для Φ_i :

$$\iint_{\Phi_i} (\vec{n}, \text{rot} \vec{p}) d\sigma = \oint_{\partial \Phi_i} (\vec{p}, \vec{\tau}) d\ell \quad \text{закрыта}$$

$$\sum_{i=1}^n \iint_{\Phi_i} = \iint_{\Phi} \Phi \quad \sum_{i=1}^n \oint_{\partial \Phi_i} = \oint_{\partial \Phi} (\vec{p}, \vec{\tau}) d\ell \Rightarrow (1) \text{ верно}$$

Замечание.

Φ — криволинейно-поверхностная
 разбиваем на конечное число гладких частей

$$\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i \quad (1) \text{ верна по } \Phi_i$$

$$\sum_{i=1}^n \Rightarrow (1) \text{ верна для } \Phi$$

Φ — многоугольная

Φ_1, Φ_2 — многоугольные $\Rightarrow (1)$ верна для Φ_i

$$\sum_{i=1}^2 \Rightarrow (1) \text{ верна для } \Phi$$



§5. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода по п-ти от пути интегрирования

Теорема 4 Пусть D — связная обл-ть на Oxy
 ф-ции $P(x,y), Q(x,y)$ заданы и непрер. на D

Тогда следующие 3 утв. эквивалентны между собой:

$$1^\circ \oint_L P dx + Q dy = 0 \quad \forall \text{ кр.-мгной кривой } L \subset D$$

$$2^\circ \int_{AB} P dx + Q dy \text{ не зависит от выбора кр.-мгной кривой, соединяющей } A \text{ и } B \text{ и целиком } AB \subset D$$

$$3^\circ \exists \text{ ф-ция } u(x,y) \text{ опред. на } D: 1) du = P dx + Q dy$$

$$2) \int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A)$$

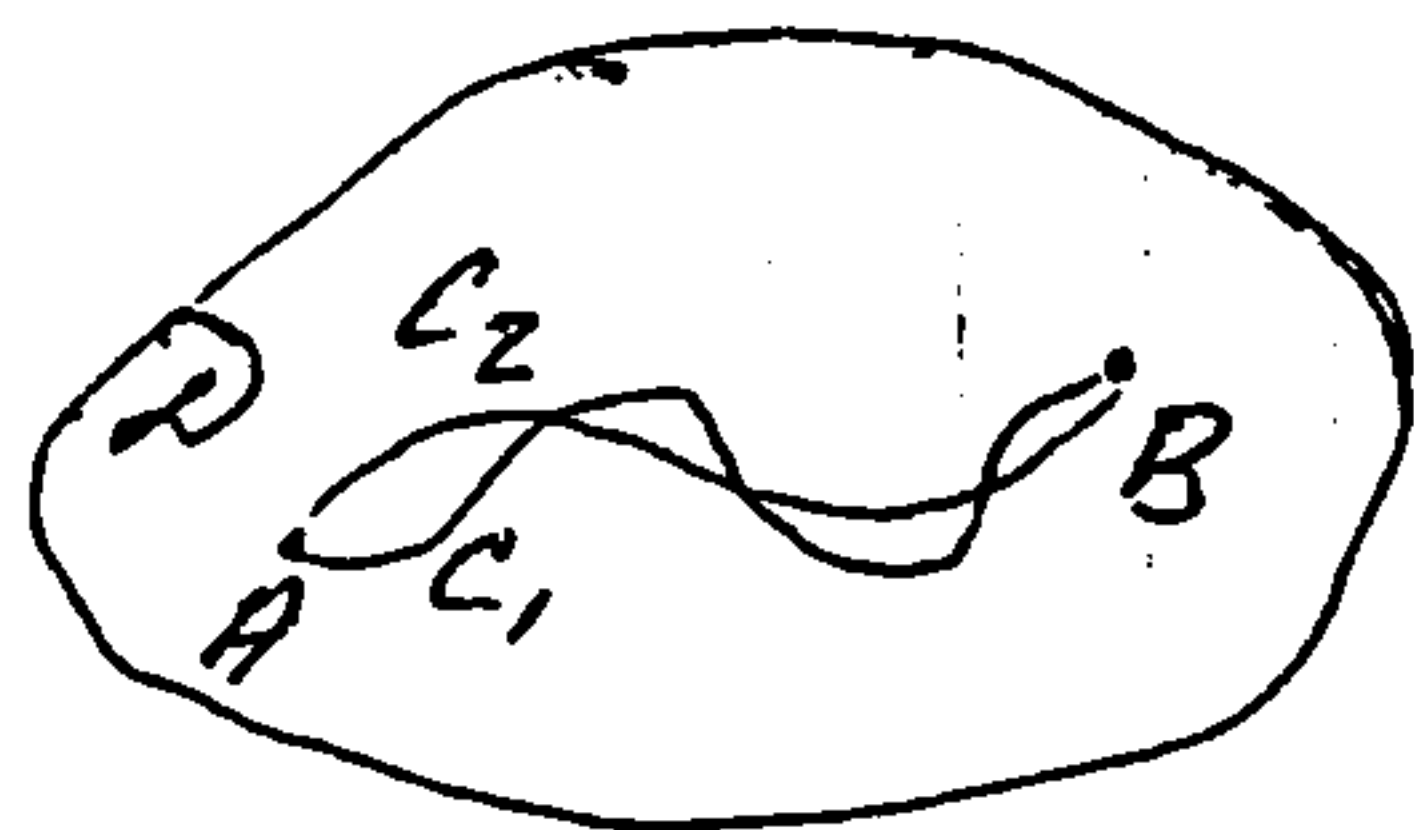
где $\forall$ ар. кр.-мгной кривой, соединяющей A и B , $AB \subset D$

Д-во: $1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 1^\circ$

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$: Δ 2 $\forall$ от. кр.-многоугольные $\cup ACB, \cup AC_2B \subset D \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \oint_{AC_2BA} Pdx + Qdy = \int_{AC_2B} Pdx + Qdy +$$

$$+ \int_{BA} Pdx + Qdy = \int_{AC_2B} Pdx + Qdy - \int_{AC_1B} Pdx + Qdy \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \int_{AC_2B} Pdx + Qdy = \int_{AC_1B} Pdx + Qdy$$

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$

Функция $\forall M_0 \in D$

$$u(x, y) = \int_{M_0M} Pdx + Qdy$$

1) D -евр., то $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow$

$$\Rightarrow du = Pdx + Qdy.$$

$$u(x, y), v(x+\Delta x, y)$$

$$\Delta u = u(N) - u(M) = u(x+\Delta x, y) - u(x, y)$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= \int_{M_0M} Pdx + Qdy - \int_{M_0N} Pdx + Qdy = \int_{MN} Pdx + Qdy = \int_{MN} Pdx = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} Pdx \stackrel{\text{среднее}}{=} P(x+\theta\Delta x, y) \cdot \int_x^{x+\Delta x} 1dx = \end{aligned}$$

$$= P(x+\theta\Delta x, y) \Delta x \quad | : \Delta x \neq 0$$

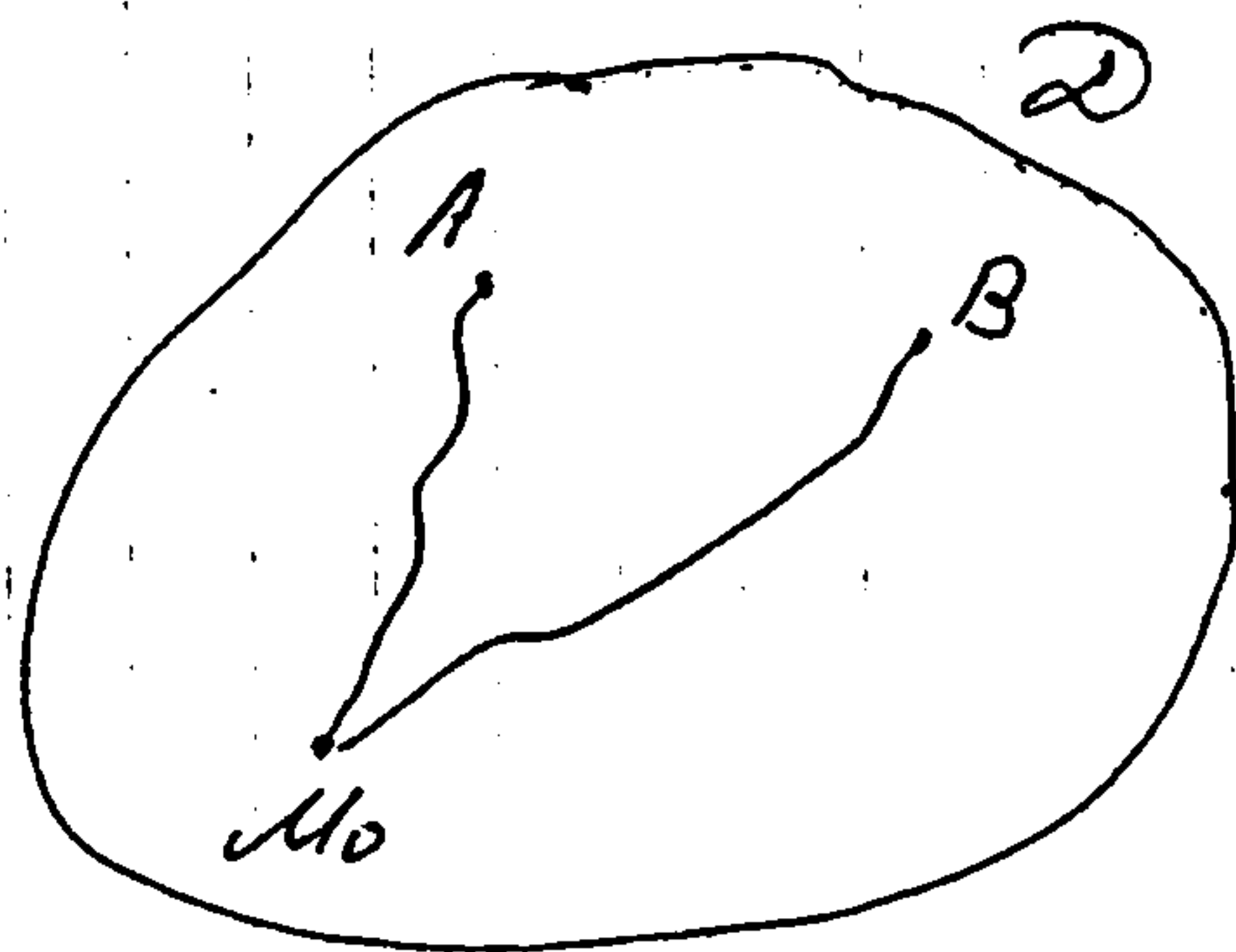
$$\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} P(x, y) \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Аналогично $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$

2)

$$\int_{AB} Pdx + Qdy \stackrel{2^\circ}{=} \int_{AM_0B} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{AM_0} Pdx + Qdy + \int_{M_0B} Pdx + Qdy \stackrel{\text{2 шаг}}{=} \int_{AM_0} Pdx + Qdy - \int_{BM_0} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$$

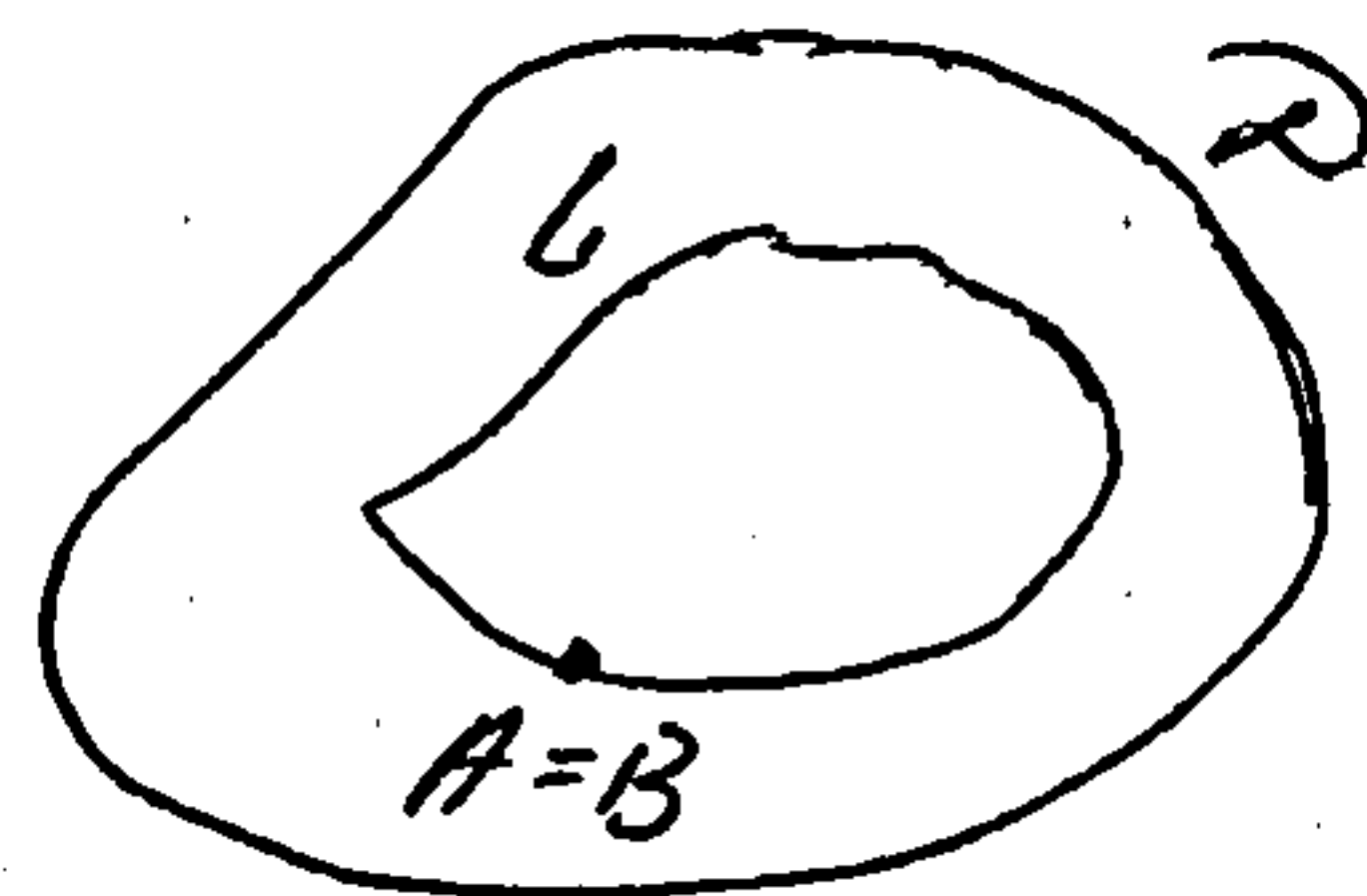


$$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$$

$\forall L$ - кр.-мгнал $\in \mathcal{D}$

$$\oint_L Pdx + Qdy \stackrel{3^\circ}{=} u(B) - u(A) = 0$$

$$\forall \gamma: A = \gamma, B \in L$$



Замечание. $\forall$ кр.-мгнал кривая и $\forall$ отр. кр.-мгнал кривая имеют не более чем конечное число точек самопересечения.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{D}$ - односвязная область на пл-ти Oxy
 P, Q - непрер. диф. ф-ция на $\mathcal{D}$ ($\exists$ непрер. $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$).

Тогда следующие усл. эквивалентно наложению из 3-х усл. 7.4:

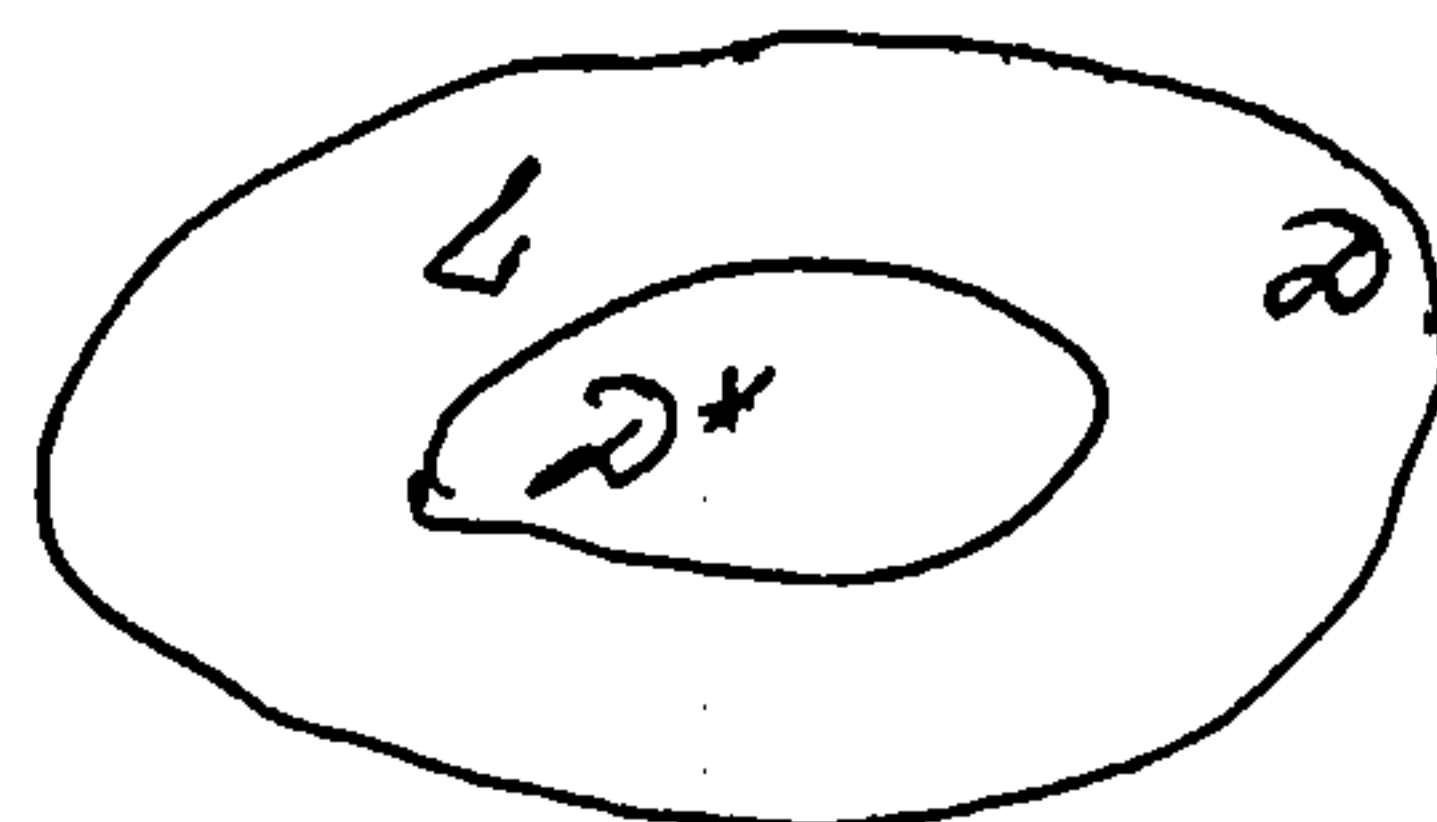
$$4^\circ \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{в } \mathcal{D}.$$

$$\mathcal{D}\text{-во: } 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \Rightarrow 1^\circ$$

$$3^\circ \Rightarrow 4^\circ \quad \exists u(x, y) : \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \stackrel{\text{непрер.}}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$4^\circ \Rightarrow 1^\circ \quad \forall L \in \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D}^* \in \mathcal{D} \quad (\text{односвязн.})$$



Ф-ла Грина в ОНБ:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$